Lineare algebraische Gruppen

Vorlesung im Sommersemester 2020
Fakultät für Mathematik, Universität Leipzig
frei nach
T.A.Springer
Birkhäuser-Verlag, Boston 1981
(zweite Auflage 1998)

Ort der Vorlesung: Seminargebäude, Raum 2-14
Zeit der Vorlesung: 13.15-14.45 Uhr Freitags

2 Lineare algebraische Gruppen - erste Eigenschaften

In diesem Kapitel werden die algebraischen Gruppen eingeführt. Wir beweisen eine Anzahl grundlegender Ergebnisse, die mit Hilfe des begrenzten Umfangs an algebraischer Geometrie behandelt werden können, wie wir ihn im ersten Kapitel kennengelernt haben.

Vereinbarungen:

k ist ein algebraisch abgeschlossener Körper.
F ist ein Teilkörper von k.
Alle Varietäten sind Varietäten über k.

2.1 Algebraische Gruppen

2.1.1 Definitionen und erste Eigenschaften

2.1.1.1 Definitionen

Eine algebraische Gruppe ist eine algebraische Varietät G, welche außerden die Struktur einer Gruppe besitzt, wobei die Abbildungen

$$\mu: G \times G \longrightarrow G, (x,y) \mapsto x\bullet y, \text{ und } i: G \longrightarrow G, x \mapsto x^{-1},$$

welche die Gruppenstruktur definierten, Morphismen von Varietäten, d.h. reguläre Abbildungen, sind.
Eine lineare algebraische Gruppe ist eine algebraische Gruppe, deren zugrundeliegende Varietät affin ist.
Seien G und G' algebraische Gruppen. Ein Homomorphismus dieser algebraischen Gruppen, ist ein Gruppen-Homomorphismus $G \longrightarrow G'$, welcher gleichzeitig ein Morphismus von algebraischen Varietäten ist.

Eine abgeschlossene Untergruppe einer algebraischen Gruppe G ist eine Untergruppe H der Gruppe G, welche bezüglich der Zariski-Topologie von G eine abgeschlossene Teilmenge ist.

Eine algebraische Gruppe G ist eine F-Gruppe, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

1. G ist eine F-Varietät.
2. μ und i sind über F definiert.
3. Das neutrale Element e der Gruppen-Operation ist ein F-rationaler Punkt (vgl. 1.6.14, 1.6.16,1.4.9, 1.3.7).

Ein Homomorphismus von F-Gruppen G, G' ist ein Gruppen-Homomorphismus

$$G \longrightarrow G',$$

welcher gleichzeitig ein über F definierter Morphismus von Varietäten ist.

Eine <u>F-Untergruppe</u> einer F-Gruppe G ist eine abgeschlossene Untergruppe H der algebraischen Gruppe G mit einer F-Struktur, für welche die natürlichen Einbettung

$$H \hookrightarrow G$$

über F definiert ist.

Bemerkungen

(i) Wir können die Menge der Punkte der Varietät G×G als mengentheoretisches Produkt betrachten (vgl. 1.5.5 Aufgabe 1, Bemerkung 1.5.1 (iv), und 1.6.3).

(ii) Die Bezeichnung “linear” für algebraische Gruppen, welche affine Varietäten sind, bedarf einer Erklärung. Der Grund dafür besteht darin, daß diese Art von Gruppen bis auf Isomorphie gerade die abgeschlossenen Untergruppen der allgemeinen linearen Gruppen $\mathbf{GL}_n$ sind. Der Beweis dieses Struktursatzen erfordert einige Vorbereitungen. Wir werden diesen im Abschhnitt 2.3 führen.

(iii) Die linearen algebraischen Gruppen sind diejenigen, mit denen wir uns hier beschäftigen werden.

(iv) Algebraische Gruppen, die als Varietäten projektive Varietäten sind, heißen <u>abelsche Gruppen</u>. Sie sind als Gruppen tatsächlich kommutativ - über $\mathbb{C}$ sind es komplexe Tori. Der Eindruck, daß deren Untersuch einfacher ist, ist falsch. Die Methoden der Theorie der abelschen Varietäten sind völlig andere als die hier behandelten und erfordern sehr viel mehr algebraische Geometrie (vgl. Mumford [1]). Die Ergebnisse zu speziellen solchen abelschen Varietäten (der Dimension 1 und vom Geschlecht 1 - der sogenannten elliptischen Kurven) spielen eine zentrale Rolle beim Beweis des Großen Fermatschen Satzes.

(v) Algebraische Gruppen G, die weder linear noch abelsch sind, können in exakte Sequenzen

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow G \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

von algebraischen Gruppen einschlossen werden mit einer linearen algebraischen Gruppe A und einer abelschen Varietät P (vgl. Conrad [1] oder Milne [1] Satz von Chevalley-Barsotti 10.25 des Onlin-Preprints). Ihre Klassifikation führt zu Fragen der homologischen Algebra.

(vi) Die Gruppen-Gesetzte einer algebraischen Gruppe G mit der Multiplikation

$$\mu: G \times G \longrightarrow G$$

und der Invertierung

$$i: G \longrightarrow G$$

lassen sich, durch die Kommutativität der folgenden Diagramme ausdrücken, wenn man mit

$$e: G \longrightarrow G$$

den konstanten Morphismus bezeichnet, der alle Punkte von G ins neutrale Element abbildet.

<u>Das Assoziativgesetzt</u>.

$$\begin{array}{ccc} G\times G\times G & \xrightarrow{\mu\times id} & G\times G \\ {\scriptstyle id\times\mu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mu} \\ G\times G & \xrightarrow{\mu} & G \end{array}$$

<u>Existenz des neutralen Elements</u>.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "(id{,}e)"] \arrow[d, "(e{,}id)"'] \arrow[dr, "id"] & G\times G \arrow[d, "\mu"] \\ G\times G \arrow[r, "\mu"] & G \end{tikzcd}$$

Dabei bezeichne (f,g) den Morhismus G ⟶ G×G mit den Koordinatenfunktionen f und g, d.h. den auf Grund der Universalitätseigenschaft des Produkts eindeutig bestimmten Morphismus G ⟶ G×G dessen Zusammensetzung mit den beiden Projektionen G×G die Morphismen f bzw. g sind.

<u>Existenz des inversen Elements</u>.

$$\begin{tikzcd} G\times G \arrow[d, "\mu"'] & G\times G \arrow[l, "i\times id"'] \\ G & G \arrow[l, "e"'] \arrow[u, "D"'] \arrow[d, "D"] \\ G\times G \arrow[u, "\mu"] & G\times G \arrow[l, "id\times i"'] \end{tikzcd}$$

Dabei sei D: G⟶G×G der <u>Diagonal-Morphismus</u>, d.h. der eindeutig bestimmte Morphismus, dessen Zusammensetzungen mit den Projektionen G×G ⟶ G in beiden Fällen der identische Morphismus id: G ⟶ G ist.

Mit anderen Worten, eine algebraische Gruppe ist eine Varietät G zusammen mit drei Morphismen

$$\mu: G \times G \longrightarrow G,\ i: G \longrightarrow G,\ e: G \longrightarrow G$$

für welche die obigen Diagramme kommutativ sind. Dabei soll e einen konstanten Morphismus bezeichnen. Dies können wir dadurch ausdrüchen, daß sich e über die triviale Gruppe faktorisiert

$$G \xrightarrow{1} \{1\} \xrightarrow{e} G.$$

Der linke Pfeil bezeichne dabei den konstanten Morphismus, welcher alle Punkte von G auf das einzige Element der trivialen Gruppe abbildet, und der zweite bezeichne den Morphismus, welcher das einzige Element der trivialen Gruppe auf das neutrale Element von G abbildet.

(vii) Im folgenden wird die <u>Kommutator-Gruppe</u> eine wichtige Rolle spielen. Für jede Gruppe G und beliebige Untergruppen

$$H \subseteq G \text{ und } K \subseteq G$$

wird sie mit

$$(H, K)$$

bezeichnet und ist definiert als die von den Kommutatoren

$$(h, k) := h\bullet k\bullet h^{-1}\bullet k^{-1} \text{ mit } h \in H \text{ und } k\in K$$

erzeugte Untergruppe von G.

2.1.1.2 Direkte Produkte von algebraischen Gruppen

Seien G' und G" algebraische Gruppen. Dann ist die Varietät G'×G" mit der Produkt-Gruppen-Struktur eine algebraische Gruppe.

Beweis. Wir bezeichnen die Morphismen, welche die Gruppen-Struktur von G' bzw. G" definieren mit

$$\mu', i', e', 1' \text{ bzw. } \mu'', i'', e'', 1''.$$

Sei $G := G'\times G''$ das Produkt der beiden Varietäten G' und G". Weiter seien

$$\sigma: G'\times G'' \longrightarrow G''\times G' \text{ und } \tau: G''\bullet G' \longrightarrow G'\times G''$$

die Morphismen, welche die beiden Faktoren vertauschen, d.h. die Zusammensetzung mit der Projektion auf den i-ten Faktor soll die Projektion auf (2-i)-ten Faktor sein für i = 1,2.

Den Produkt-Morphismus

$$\mu: G\times G \longrightarrow G$$

definieren wir als den Morphismus, welcher aus

$$\mu'\times\mu'': G'\times G'\times G''\times G'' \longrightarrow G'\times G''$$

durch Zusammensetung mit dem Morphismus

$$id\times\tau\times id: G'\times G''\times G'\times G'' \longrightarrow G'\times G'\times G''\times G''$$

ensteht, der die beiden inneren Faktoren permutiert.
Der Invertierungsmorphismus von $G = G'\times G''$ wird definiert als

$$i = i'\times i'': G'\times G'' \longrightarrow G'\times G''.$$

Wir haben die Kommutativität der drei Diagramme zu beweisen, welche für die Gruppenaxiome von G stehen. Für jedes dieser drei Diagramme nehmen wir die entprechenden Diagramme für G' und G" her und bilden die direkten Produkte aller einander entsprechender Morphismen. Diese Produkt-Morphismen setzen sich zu einem kommutativen Diagramm zusammen, welches sich vom eigentlich interessierenden Diagramm nur durch eine Permutation der Faktoren unterscheidet. Durch Ausführen dieser Permuation erhalten wir das gewünschte Diagramm.
Zum Beipspiel gehen wir zum Beweis des Assoziativgesetzes für G von den Diagrammen

$$\begin{array}{ccc} G'\times G'\times G' & \xrightarrow{\mu'\times id} & G'\times G' \\ {\scriptstyle id\times\mu'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu'} \\ G'\times G' & \xrightarrow{\mu'} & G' \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} G''\times G''\times G'' & \xrightarrow{\mu''\times id} & G''\times G'' \\ {\scriptstyle id\times\mu''}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu''} \\ G''\times G'' & \xrightarrow{\mu''} & G'' \end{array}$$

aus. Deren Kommutativität impliziert die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} (G'\times G'\times G')\times(G''\times G''\times G'') & \xrightarrow{(\mu'\times id)\times(\mu''\times id)} & (G'\times G')\times(G''\times G'') \\ {\scriptstyle (id\times\mu')\times(id\times\mu'')}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu'\times\mu''} \\ (G'\times G')\times(G''\times G'') & \xrightarrow{\mu'\times\mu''} & G'\times G'' \end{array}$$

Durch Zusammensetzen mit Isomorphismen, welche die Faktoren in geigneter Weise permutieren, erhalten wir das Assoziativgesetz für G. In derselben Weise gehen wir bei den anderen beiden Axiomen vor.
QED.

2.1.1.3 Abgeschlossene Untergruppen

Eine abgeschlossene Untergruppe H einer algebraischen Gruppe G besitzt die Struktur einer algebraischen Gruppe, für welche die natürliche Einbettung

$$j:H \hookrightarrow G$$

ein Homomorphismus von algebraischen Gruppen ist.
Beweis. Aus dem Multiplikationsmorphismus

$$\mu: G\times G \longrightarrow G$$

erhalten wir durch Zusammensetzen mit $j\times j$ einen Morphismus

$$H\times H \longrightarrow G.$$

Weil H eine Untergruppe der Gruppe G ist, liegt das Bild dieses Morphismus in H, d.h. wir können diesen Morphismus als Morphismus

$$\mu':H\times H \longrightarrow H$$

mit Werten in H betrachten. Dieser beschreibt die Multiplikation von H. Analog erhält man durch Einschränken des Invertierungsmorphismus i: G $\longrightarrow$ G auf H einen Morphismus

$$i': H \longrightarrow H,$$

welcher den Übergang zum inversen Element für H beschreibt. Die drei kommutativen Diagramme für H erhält man aus denen für G durch Einschränken auf H.
QED.

2.1.1.4 Die rationalen Punkte einer F-Gruppe

Sei G eine F-Gruppe. Dann besitzt die Menge G(F) der rationalen Punkte von G in natürlicher Weise die Struktur einer Gruppe.
Beweis. Nach Definition ist

$$G(F) = \{\text{F-Morphismen } \mathbb{A}^0 \longrightarrow X \}$$

(vgl. 1.6.16). Die Gruppen-Multiplikation μ: G×G $\longrightarrow$ G definiert eine Abbildung

$$G(F) \times G(F) \longrightarrow G(F),\ (f, g) \mapsto f\bullet g := \mu\circ(f\times g)\circ D,$$

wobei D die diagonale Einbettung von $\mathbb{A}^0$ bezeichne,

$$D: \mathbb{A}^0 \longrightarrow \mathbb{A}^0\times \mathbb{A}^0,\ x \mapsto (x,x).$$

Die kommutativen Diagramm von Bemerkung 2.1.1.1 (vi) bedeuten gerade, daß auf diese Weise eine Gruppen-Operation definiert ist. Man beachte, für $x \in \mathbb{A}^0$ ist nach Definition

$$(f\bullet g)(x) = f(x)\bullet g(x).$$

QED.

2.1.2 Beschreibung der Gruppen-Axiome im Fall linearer algebraischer Gruppen mit Hilfe von k-Algebra-Homomorphismen.

2.1.2 A Die Beschreibung

Sei G eine lineare algebraische Gruppe mit dem Koordinatenring

$$A := k[G].$$

Dann sind nach Definition die Morphismen

$$\mu: G\times G \longrightarrow G,\ (x,y) \mapsto x\bullet y, \text{ und } i: G \longrightarrow G,\ x \mapsto x^{-1},$$

definiert durch Algebra-Homomorphismen

$$\Delta := \mu^*: A \longrightarrow A\otimes_k A \text{ bzw. } \iota := i^*: A \longrightarrow A.$$

Diese heißen <u>Komultiplikation</u> von G bzw. <u>Antipode</u> von G. Außerdem definiert das neutrale Element e von G einen Algebra-Homomophimus

$$e: k[G] \longrightarrow k,\ f \mapsto f(e),$$

welcher ebenfalls mit e bezeichnet wird (e wird als k-rationaler Punkt von G aufgefaßt).

Wir verwenden außerdem die Bezeichnungen m un ε für die <u>Multiplikationsabbildung</u>

$$m: A\otimes A \longrightarrow A,\ f\otimes g \mapsto f\bullet g,$$

bzw. für die Zusammensetzung

$$\varepsilon: A \xrightarrow{e} k \hookrightarrow A$$

von e mit der natürlichen Einbettung $k \hookrightarrow A$, $c \mapsto c \cdot 1_A$. Die Gruppen-Axiome kann man dann durch die folgenden kommutativen Diagramme ausdrücken.

Das Assoziativgesetz.

$$\begin{array}{ccc} A\otimes A\otimes A & \xleftarrow{\Delta\otimes id} & A\otimes A \\ {\scriptstyle id\otimes\Delta}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\Delta} \\ A\otimes A & \xleftarrow{\Delta} & A \end{array}$$

Existenz des neutralen Elements.

$$\begin{array}{ccc} A & \xleftarrow{id\otimes\varepsilon} & A\otimes A \\ {\scriptstyle \varepsilon\otimes id}\uparrow & \nwarrow{\scriptstyle id} & \uparrow{\scriptstyle\Delta} \\ A\otimes A & \xleftarrow{\Delta} & A \end{array}$$

Existenz des inversen Elements.

$$\begin{array}{ccc} A\otimes A & \xrightarrow{\iota\otimes id} & A\otimes A \\ {\scriptstyle\Delta}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle m} \\ A & \xrightarrow{\varepsilon} & A \\ {\scriptstyle\Delta}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle m} \\ A\otimes A & \xrightarrow{id\otimes\iota} & A\otimes A \end{array}$$

2.1.2 B Der Fall von F-Gruppen

Sei jetzt G eine F-Gruppe, welche als Varietät affin ist. Dann hat der Koordinaten-Ring von G die Gestalt

$$k[G] = F[G]\otimes_F k$$

mit einer (endlich erzeugten) F-Algebra F[G], und die k-Algebra-Homorphismen Δ, ι, e und ε entstehen aus F-Algebra-Homomorphismen durch Anwenden des Funktors $\otimes_F k$. Wenn man in den obigen Diagrammen die k-Algebra A überall durch F[X] ersetzt, das Tensorprodukt über k überall durch das über F und die Homomorphismen Δ, ι, e und ε durch die entprechenden F-Algebra-Homomorphismen, so erhält man Diagrammen, die nach Anwenden des Funktors $\otimes_F k$ kommutativ werden (und für die Gruppen-Axiome von G stehen).

Zeigen wir, daß diese Diagramme bereits vor dem Anwenden des Funktors $\otimes_F k$ kommutativ sind.

Dazu reicht es zu zu zeigen, daß für zwei F-Algebren A und B und je zwei F-Algebra-Homomorphismen

$$f, g: A \longrightarrow B \text{ mit } f\otimes_F k = g\otimes_F k$$

bereits f = g gilt. Dazu betrachten wir f und g als F-lineare Abbildungen und bilden deren Differenz. Wir erhalten eine F-lineare Abbildung und eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(f-g) \xrightarrow{i} A \xrightarrow{f-g} B$$

von F-Vektorraumen. Durch Anwenden des Funktors $\otimes_F k$ erhalten wir eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(f-g)\otimes_F k \xrightarrow{i\otimes k} A\otimes_F k \xrightarrow{(f-g)\otimes k} B\otimes_F k$$

wobei die lineare Abbildung rechts identisch 0 ist. Deshalb ist die Injektion links auch surjektiv und der Kokern ist trivial

$$\mathrm{Koker}(i\otimes k) = 0.$$

Weil $\otimes_F k$ ein exakter Funktor ist, kommutiert er mit dem Übergang zum Kokern, d.h. es gilt

$$\mathrm{Koker}(i)\otimes_F k = 0$$

Weil das Tensorprodukt mit direkten Summen kommutiert bilden für jede Basis

$$\{v_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$$

des F-Vektorraums Koker(i) die Elemente $v_\lambda\otimes 1$ eine Basis des k-Vektorraums $\mathrm{Koker}(i)\otimes_F k$. Letzterer ist 0, d.h. die Anzahl der Basis-Elemente ist 0. Dann ist aber auch Koker(i) = 0, d.h. i ist surjektiv und es gilt f = g.

2.1.3 Aufgaben

Aufgabe 1
Überprüfen Sie die Übersetzung der Gruppen-Axiome von 2.1.2.

Hinweis. Die kommutativen Diagramme von 2.1.2 entstehen aus denen von Bemerkung 2.1.1.1 (vi) durch Anwenden des Funktors

{Affine Varietäten } $\longrightarrow$ { k-Algebren }, $X \mapsto k[X]$, $f{:}X\longrightarrow Y \mapsto f^*{:}k[Y] \longrightarrow k[X]$.
(vgl. Bemerkung 1.4.7 (vi)). Es reicht deshalb die Diagramme von Bemerkung 2.1.1.1(vi) zu überprüfen.

Aufgabe 2
Definieren Sie den Begriff der Präalgebraischen Gruppen basierend auf dem Begriff der Prävarietät (vgl. 1.6.1). Zeigen Sie, jede präalgebraische Gruppe ist algebraisch.

Beweis. Definition: eine <u>präalgebraische Gruppe</u> ist eine Prävarietät G zusammen mit drei Morphismen

$$\mu\colon G \times G \longrightarrow G,\ i\colon G \longrightarrow G,\ e\colon G \longrightarrow G,$$

für welche die Diagramme von Bemerkung 2.1.1.1 (vi) kommutativ sind, wobei der Morphismus e eine konstante Abbildung ist. Zu zeigen ist, daß das Bild der Diagonal-Abbildung

$$D\colon G \longrightarrow G\times G,\ x \mapsto (x, x),$$

abgeschlossen ist. Die Abbildung

$$\varphi = \mu\circ(\mathrm{id}\times i){:}G \times G \longrightarrow G,\ (x,y) \mapsto (x, y^{-1}) \mapsto x\bullet y^{-1},$$

ist als Zusammensetzung von Morphismen ein Morphismus. Weil G eine Prävarietät ist, besitzt das neutrale Element $e \in G$ eine affine offene Umgebung, sagen wir

$$e \in U = \text{affin und offen in } G.$$

Auch die Einschränkung

$$\psi = \varphi|_{\varphi^{-1}(U)}\colon \varphi^{-1}(U) \longrightarrow U$$

ist ein Morphismus (und insbesondere stetig).
Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(D) &= \{(x,y) \in G\times G \mid x = y\} \\
&= \{(x,y) \in G\times G \mid xy^{-1} = e\} \\
&= \varphi^{-1}(e). \\
&= \psi^{-1}(e).
\end{aligned}$$

Weil ψ stetig ist, reicht es zu zeigen, daß die einpunktige Menge $\{e\}$ abgeschlossen ist. Das ist aber der Fall: jede einpunktige Teilmenge $\{p\}$ einer algebraischen Menge X ist abgeschlossen:

$$\{p\} = V(M_p).$$

Explizit: für $p = (p_1,...,p_n) \in X \subseteq k^n$ ist

$$p = V(T_1-p_1,...,T_n-p_n) \cap X = V_X(T_1-p_1|_X,...,T_n-p_n|_X).$$

QED.

2.1.4 Beispiele

2.1.4 Beispiel 1: $\mathbf{G}_a$

Sei $G = \mathbb{A}^1$ (= k als Menge) mit der Addition als Gruppenoperation, d.h. die Gruppenstruktur ist gegeben durch

$$\mu: G \times G \longrightarrow G,\ (x, y) \mapsto x+y,$$

$$i: G \longrightarrow G,\ x \mapsto -x,$$

$$e: G \longrightarrow G,\ x \mapsto 0.$$

Der Koordinatenring von G ist

$$k[G] = k[\mathbb{A}^1] = k[T] \quad \text{(eine Unbestimmte).}$$

Die zugehörigen k-Algebra-Homomorphismen sind:

$$\Delta = \mu^*: k[T] \longrightarrow k[T]\otimes k[T] \cong k[T, U],\ p(T) \mapsto p(T+U),$$

$$\iota = i^*: k[T] \longrightarrow k[T],\ p(T) \mapsto p(-T).$$

$$\varepsilon = e^*: k[T] \longrightarrow k,\ p(T) \mapsto p(0).$$

Man beachte, es gilt

$$\mu^*(p)(T,U) = (p\circ\mu)(T,U) = p(\mu(T,U)) = p(T+U).$$
$$i^*(p)(T) = (p\circ i)(T) = p(i(T)) = p(-T).$$
$$e^*(p)(T) = (p\circ e)(T) = p(e(T)) = p(0).$$

Die affine Gerade $\mathbb{A}^1$ mit dieser Gruppen-Operation wird mit

$$\mathbf{G}_a$$

bezeichnet und heißt <u>additive Gruppe</u>.

Für jeden Teilkörper F von k ist der Polynomring F[T] eine F-Strutur von k[T], definiert also eine F-Struktur der Gruppe.

2.1.4 Beispiel 2: $\mathbf{G}_m$

Sei $G = \mathbb{A}^1 - \{0\}$ (= k-{0} als Menge) mit der Multiplikation als Gruppenoperation, d.h. die Gruppenstruktur ist gegeben durch

$$\mu: G \times G \longrightarrow G,\ (x, y) \mapsto x\bullet y,$$

$i: G \longrightarrow G,\ x \mapsto x^{-1}$,

$e: G \longrightarrow G,\ x \mapsto 1$.

Der Koordinatenring von G ist

$$k[G] = k[\mathbb{A}^1\text{-}\{0\}] = k[T]_T = k[T,T^{-1}] \text{ (eine Unbestimmte).}$$

Die zugehörigen k-Algebra-Homomorphismen sind:

$\Delta = \mu^*: k[T,T^{-1}] \longrightarrow k[T,T^{-1}]\otimes k[T,T^{-1}] \cong k[T,T^{-1},U,U^{-1}],\ p(T) \mapsto p(T\bullet U)$,

$\iota = i^*: k[T,T^{-1}] \longrightarrow k[T,T^{-1}],\ p(T) \mapsto p(T^{-1})$.

$\varepsilon = e^*: k[T] \longrightarrow k,\ p(T) \mapsto p(1)$.

Die punktierte affine Gerade $\mathbb{A}^1$-{0} mit dieser Gruppen-Operation wird mit

$\mathbf{G}_m$ oder $\mathbf{GL}_1$

bezeichnet und heißt <u>multiplikative Gruppe</u>.

Für jeden Teilkörper F von k ist der Ring $F[T,T^{-1}]$ eine F-Strutur von $k[T,T^{-1}]$, definiert also eine F-Struktur der Gruppe.

Für jede von 0 verschiedene ganze Zahl n ist

$\phi: \mathbf{G}_m \longrightarrow \mathbf{G}_m,\ x \mapsto x^n$,

ein Homomorphismus von algebraischen Gruppen.
Ist die Charakteristik von k eine Primzahl, sagen wir

Char(k) = p,

und n eine Potenz von p, so ist ϕ ein Isomorphismus von abstrakten Gruppen, jedoch keiner von algebraischen Gruppen, denn

$\phi^*: k[T, T^{-1}] \longrightarrow k[T, T^{-1}],\ p(T) \mapsto p(T^n)$,

ist nicht surjektiv für $n \neq \pm 1$. (vgl. Bemerkung 1.4.7(vi)).

2.1.4 Beispiel 3: $\mathbf{GL}_n$

Sei

$$\mathbf{M}_n$$

die Menge der n×n-Matrizen mit Einträgen aus k. Wir können diese Menge mit dem k^{n^2} identifizieren. Die Determinante definiert eine reguläre Funktion

$$\det: k^{n^2} \longrightarrow k$$

auf dem k^{n^2}. Die allgemeine lineare Gruppe ist definiert als die offene Hauptmenge

$$G := D(\det) = \{A \in \mathbf{M}_n \mid \det(A) \neq 0\}$$

mit der Matrizen-Multiplikation als Operation, d.h. die Gruppenstruktur ist gegeben durch

$\mu: G \times G \longrightarrow G,\qquad ((x_{ij}), (y_{ij})) \mapsto (x_{ij})\bullet(y_{ij}) = (\sum_{\nu=1}^{n} x_{i\nu}\bullet y_{\nu j})$,

$i: G \longrightarrow G,\qquad (x_{ij}) \mapsto (x_{ij})^{-1} = \det(x)^{-1}\bullet(A_{ji}(x))$,

$e: G \longrightarrow G,\qquad (x_{ij}) \mapsto (\delta_{ij})$.

Dabei sollen die $A_{ij}(x)$ die adjungierten Unterdeterminanten von $x=(x_{ij})$ bezeichnen.

Der Koordinatenring der Gruppe ist

$$k[G] = k[T_{ij}, \det(T_{ij})^{-1} \mid i,j = 1,..., n]$$

mit Unbestimmten T_{ij}.

Die zugehörigen k-Algebra-Homomorphismen sind:

$$\Delta=\mu^*\colon k[G]\longrightarrow k[G]\otimes k[G],\ p(...,T_{ij},...) \mapsto p(..., \sum_{\nu=1}^{n} T_{i\nu}\otimes T_{\nu j},...),$$

$$\iota = i^*\colon k[G] \longrightarrow k[G],\ p(...,T_{ij},...) \mapsto p(...,\det(T)^{-1}\bullet(A_{ji}(T)),...).$$

$$\varepsilon = e^*\colon k[G] \longrightarrow k,\ p(...,T_{ij},...) \mapsto p(...,\delta_{ij},...).$$

Dabei soll T die Matrix der T_{ij} bezeichnen.

Die offene Hauptmenge G = D(det) mit dieser Gruppen-Operation wird mit

$$\mathbf{GL}_n$$

bezeichnet und heißt allgemeine lineare Gruppe.
Für n = 1 erhalten wir gerade das vorige Beispiel 2.

Da $\mathbf{M}_n$ eine irreduzible Varietät ist, ist auch die offene Teilmenge $\mathbf{GL}_n$ irreduzibel (vgl. 1.2.3(i) und Bemerkung 1.2.3). Insbesondere ist

$$\dim \mathbf{GL}_n = \dim \mathbf{M}_n = n^2$$

(vgl. 1.8.1.1).

<u>Die</u> F-<u>Struktur der</u> $\mathbf{GL}_n$.

Für jeden Teilkörper $F \subseteq k$ ist die allgemeine lineare Gruppe $\mathbf{GL}_n$ eine F-Gruppe, für welche die zugehörige F-Strtuktur der Koordinatenrings gleich

$$\begin{aligned} F[\mathbf{GL}_n] &:= F[T_{ij}, \det(T_{ij})^{-1} \mid i,j = 1,..., n] \\ &= F[T_{ij}, D \mid i,j = 1,..., n] /\{ D\bullet \det(T_{ij}) - 1\} \end{aligned}$$

ist (vgl. 2.1.1.1 und 1.3.7 B). Der Körper F ist dann Definitionskörper von

$$\mathbf{GL}_n = \{(A,d) \in \mathbf{M}_n \times k \mid d\bullet\det(A) - 1 = 0\} \subseteq \mathbf{M}_n \times k$$

und die Menge der F-rationalen Punkte von $\mathbf{GL}_n$ können wir identifizieren mit der Menge (vgl. Bemerkung 1.3.7 B (i))

$$\mathbf{GL}_n(F) = \{ (A, \det(A)^{-1}) \in \mathbf{GL}_n\times k \mid \text{die Einträge von A liegen in F} \}$$

Da die zweite Koordinate des Paares $(A, \det(A)^{-1})$ durch die erste festgelegt ist, können wir die F-rationalen Punkte identifizieren mit der Menge

$$\mathbf{GL}_n(F) = \{ A \in \mathbf{GL}_n \mid \text{die Einträge von A liegen in F} \}$$

der umkehrbaren n×n-Matrizen mit Einträgen aus F.

2.1.4 Beispiel 4: abgeschlossenen Untergruppen der $\mathbf{GL}_n$

Jede Untergruppe der $\mathbf{GL}_n$, welche abgeschlossen ist in der Zariski-Topologie, ist eine lineare algebraische Gruppe (nach 2.1.1.3). Hier ist eine Liste von Beispielen (siehe auch Aufgabe 2 von 2.1.5).

(a) Die endlichen Untergruppen der $\mathbf{GL}_n$.

(b) Die Gruppe $\mathbf{D}_n$ der nicht-singulären Diagolnalmatrizen.

(c) Die Gruppe $\mathbf{T}_n$ der oberen Dreiecksmatrizen $X = (x_{ij}) \in \mathbf{GL}_n$ mit $x_{ij}=0$ für $i > j$.

(d) Die Gruppe $\mathbf{U}_n$ der unipotenten oberen Dreiecksmatrizen, d.h. der $X=(x_{ij}) \in \mathbf{T}_n$ für welche die Einträge auf der Hauptdiagonalen gleich 1 sind.

(e) Die spezielle lineare Gruppe $\mathbf{SL}_n := \{ X \in \mathbf{GL}_n \mid \det(X) = 1 \}$.

(f) Die orthogonale Gruppe $\mathbf{O}_n := \{ X \in \mathbf{GL}_n \mid X^T \bullet X = 1 \}$.

(g) Die spezielle orthogonale Gruppe $\mathbf{SO}_n := \mathbf{O}_n \cap \mathbf{SL}_n$.

(h) Die symplektische Gruppe $\mathbf{Sp}_{2n} = \{ X \in \mathbf{GL}_n \mid X^T \bullet \mathbf{J} \bullet X = 1 \}$ mit

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Dabei soll 1_n die n×n-Einheitsmatrix bezeichnen.

2.1.4 Beispiel 5: elliptische Kurven

Als Beispiel für eine nicht-lineare algebraische Gruppe (die wir im folgenden nicht brauchen) erwähnen wir die elliptischen Kurven. Diese sind abgeschlossene Teilmengen der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2$. Der Einfachheit halber nehmen wir an, die Charakteristik von k ist von 2 und 3 verschieden,

$$\mathrm{Char}(k) \neq 2, 3.$$

Dann kann eine solche Gruppe definiert werden als die Menge der $[x_0,x_1,x_2] \in \mathbb{P}^2$ mit

$$x_0 x_2^2 = x_1^3 + a \bullet x_1 \bullet x_0^2 + b \bullet x_0^3,$$

wobei $a, b \in k$ so gewählt sind, daß das Polynom $T^3 + a \bullet T + b$ keine mehrfachen Nullstellen besitzt.

Das neutrale Element der Gruppe ist $e = [0,0,1]$. Die Gruppen-Operation ist kommutativ und wird additiv geschrieben. Sie ist so beschaffen, daß für drei Punkte $a, b, c \in G$

$$a + b + c = e$$

gilt, wenn sie im $\mathbb{P}^2$ einer linearen Relation

$$c_0 x_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0 \text{ mit } c_i \in k, \text{ nicht alle } c_i \text{ gleich } 0,$$

genügen (d.h. wenn sie auf einer Geraden liegen). Auf diese Weise ist eine Addition definiert. Es ist nicht schwer, zu zeigen, daß

$$-x = [x_0,x_1,-x_2] \text{ für } x = [x_0,x_1,x_2] \in G$$

gilt.

Die Addition kann durch explizite Formeln beschrieben werden, welche jedoch nicht besonders erhellend sind. Ein Beweis des Assozialivgesetzes dieser Operation auf der Basis dieser Formeln wäre unangemessen aufwendig. Es gibt bessere geometrischere Wege die Gruppenstruktur auf einer solchen Kurve zu behandeln. Wir verweisen auf Hartshorne [1], Beispiel IV.1.3.7, Beispiel IV.3.3.3 und Proposition IV.4.6.

2.1.5 Aufgaben

2.1.5 Aufgabe 1

Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über k.

(a) Definieren sie eine lineare algebraische Gruppe **GL**(V), deren abstrakte Gruppe die Gruppe der umkehrbaren linearen Abbildungen $V \longrightarrow V$ ist und die isomorph ist zur $\mathbf{GL}_n$ mit n = dim V.

(b) Eine F-Struktur V_0 auf V (1.3.7) definiert die Struktur einer F-Gruppe auf **GL**(V). Die entsprechende Gruppe der rationalen Punkte **GL**(V)(F) ist die Gruppe $GL(V_0)$ der umkehrbaren F-linearen Abbildung $V_0 \longrightarrow V_0$.

Beweis. Zu (a).

1. Schritt. Die Universalitätseigenschaft der symmetrischen Algebra über einem k-Vektorraum V der Dimension $\dim_k V := s < \infty$ und die einer Polynomalgebra über k in s Unbestimmten.

Formal ist die symmetrische Algebra über einem k-Vektorraum V durch eine Universalitätseigenschaft definiert:

$$S(V) := S_k(V)$$

ist eine kommutative k-Algebra, welche den k-Vektorraum V enthält,

$$V \hookrightarrow S(V)$$

mit der Eigenschaft, daß es für jede k-lineare Abbildung

$$V \longrightarrow A$$

mit Werten in einer k-Algebra A genau eine Fortsetzung

$$S(V) \longrightarrow A$$

zu einem k-Algebra-Homomorphismus gibt.

Dies entspricht der Universalitätseigenschaft des Polynomrings

$$k[X] := k[X_1,...,X_s]$$

in den Unbestimmten X_i, nach welcher es zu beliebig vorgegebenen Werten

$$a_1,...,a_s \in A$$

in einer kommutativen k-Algebra A genau einen k-Algebra-Homomorphismus

$$\phi: k[X_1,...,X_s] \longrightarrow A$$

gibt mit $\phi(X_i) = a_i$ für i = 1,...,s.

Speziel für $A := S_k(V)$ und für den Fall daß die a_i eine Basis von V bilden, erhält man genau einen k-Algebra-Homomomorphismus

$$\phi: k[X_1,...,X_s] \longrightarrow S_k(V) \text{ mit } \phi(X_i) = a_i \text{ für jedes } i.$$

Weil die a_i eine Basis von V bilden, ist die Einschränkung von ϕ auf den k-Vektorraum der linearen Polynome

$$k[X]_1 := k\cdot X_1 + ... + k\cdot X_s$$

ein k-linearer Isomorphismus

$$\phi|_{k[X]_1} : k[X]_1 \xrightarrow{\cong} V,$$

dessen Umkehrung

$$\phi|^{-1}_{k[X]_1} : V \xrightarrow{\cong} k[X]_1 \subseteq k[X]$$

sich wegen der Universalitätseigenschaft von $S_k(V)$ auf genau eine Weise zu einem k-Algebra-Homomorphismus

$$\psi: S_k(V) \longrightarrow k[X]$$

fortsetzen läßt. Nach Konstruktion gilt

$$(\phi\circ\psi)(v) = \phi(\psi(v)) = \phi(\phi^{-1}(v)) = v$$

für jedes $v \in V$ (weil ψ auf V als Umkehrung von ϕ definiert wurde). Außerdem ist

$$(\psi\circ\phi)(X_i) = \psi(\phi(X_i)) = \psi(a_i) = \phi^{-1}(a_i) = X_i.$$

Es gilt also

$$\phi\circ\psi\,|_V = Id_V \text{ und } \psi\circ\phi|_{\{X_1,...,X_s\}} = Id_{\{X_1,...,X_s\}}.$$

Diese letzten beiden Identitäten bleiben bestehen, wenn man $\phi\circ\psi$ und $\psi\circ\phi$ durch die identischen Abbildungen von V bzw. von $\{ X_1,...,X_s\}$ ersetzt. Auf Grund der Eindeutigkeitsaussagen der Universalitätseigenschaften von $S_k(V)$ bzw. k[X], folgt, daß

$$\phi\circ\psi= Id_{S_k(V)} \text{ und } \psi\circ\phi = Id_{k[X]}$$

gelten muß, d.h. ϕ und ψ sind zueinander inverse k-Algebra-Isomorphismen.

2. Schritt. Die Struktur einer afffinen algebraischen Varietät auf einem k-Vektorraum V endlicher Dimension

$$\dim_k V = n < \infty,$$

bezüglich welcher V isomorph ist zum affinen Raum $\mathbb{A}^n$.

Der Koordinatenring k[V] sollte alle k-linearen Funktionen $V \longrightarrow k$ enthalten (wie der Koordinatenring von k^n alle k-linearen Funktionen $k^n \longrightarrow k$ enthält. Außerdem sollten alle Polynome in solchen k-linearen Funktionen im Ring k[V] liegen und diese Polynome sollten gerade k[V] bilden (wie dies analog für den k^n der Fall ist). Wir haben also eine natürliche Inklusion

$$V^* \hookrightarrow k[V].$$

Weil k[V] eine k-Algebra ist, läßt sich diese natürliche Inklusion zu einem k-Algebra-Homomorphismus

$$\varphi:S_k(V^*) \twoheadrightarrow k[V]$$

fortsetzen. Dieser ist surjektiv, weil die Polynome in den linearen Funktionen auf V die k-Algebra k[V] bilden (und alle linearen Funktionen im Bild liegen). Wir betrachten eine Basis von V, sagen wir

$$v_1,...,v_n \in V$$

und die zugehörige duale Basis

$$\ell_1,...,\ell_n \in V^*.$$

Die v_i definieren einen k-linearen Isomorphismus

$$\psi:k^n \longrightarrow V, \sum_i \lambda_i e_i \mapsto \sum_i \lambda_i v_i,$$

welcher einen k-Algebra-Homomorphismus

$$\psi^*:k[V] \longrightarrow k[\mathbb{A}^n],\ f \mapsto f\circ\psi,$$

induziert. Für die Zusammensetzung mit φ gilt

$$\psi^*(\varphi(\ell_i)) = \psi^*(\ell_i) = \ell_i\circ\psi.$$

Wegen $(\ell_i\circ\psi)(e_j) = \ell_i(\psi(e_j)) = \ell_i(v_j) = \delta_{ij}$ ist $\ell_i\circ\psi$ gerade die i-te Koordinatenfunktion T_i des k^n. Nach dem ersten Schritt können wir $S_k(V^*)$ mit dem Polynomring

$$S_k(V^*) = k[\ell_1,...,\ell_n]$$

in den Unbestimmten ℓ_i identifizieren. Die Zusammensetzung

$$k[\ell_1,...,\ell_n] = S_k(V^*) \overset{\varphi}{\twoheadrightarrow} k[V] \overset{\psi^*}{\twoheadrightarrow} k[\mathbb{A}^n] = k[T_1,...,T_n],\ \ell_i \mapsto T_i,$$

ist ein k-Algebra-Homomorphismus, der die Unbestimmten ineinander abbildet, also ein Isomorphismus. Die Surjektion φ ist also auch injektiv, also ein Isomorphismus. Wir können

$$k[V] := S_k(V^*)$$

setzen. Die obigen Rechnungen zeigen, daß jeder k-lineare Isomorphismus $k^n \longrightarrow V$ einen Isomorphismus $k[V] \longrightarrow k[k^n] = k[T_1,...,T_n]$ der Koordinatenringe induziert. Auf diese Weise wird die Menge V zu einer affinen algebraischen Varietät mit dem Koordinatenring $k[V] = S_k(V^*)$, welche isomorph ist zum $\mathbb{A}^n$. Jeder k-lineare Isomorphismus $k^n \longrightarrow V$ ist ein Isomorphismus affiner algebraischer Varietäten.

3. <u>Schritt</u>. Die Struktur einer afffinen algebraischen Varietät **GL**(V) für der Gruppe der k-linearen Automorphismen eines k-Vektorraums V endlicher Dimension

$$\dim_k V = n < \infty,$$

bezüglich welcher **GL**(V) isomorph ist zu $\mathbf{GL}_n$.

Wir betrachten die Situation des zweiten Schritt mit $E = \mathrm{End}_k(V)$ anstelle von V. Wir erhalten auf E die Struktur einer affinen algebraischen Varietät mit dem Koordinatenring

$$k[E] = S_k(E^*),$$

wobei jeder k-lineare Isomorphismus

$$k^{n^2} \longrightarrow E$$

ein Isomorphismus affiner algebraischer Varietäten ist. Wir können anstelle von k^{n^2} die Algebra der n×n-Matrizen $\mathbf{M}_n$ mit Einträgen aus k verwenden und k-lineare Abbildungen

$$\mathbf{M}_n \longrightarrow E$$

betrachten, die invers sind zum Isomorphismus

$$\varphi:E \longrightarrow \mathbf{M}_n,\ f \mapsto M(f), \tag{1}$$

welcher jedem Endomorphismus $f \in E$ auf die Matrix M(f) von f abbildet bezüglich einer fest vorgegebenen Basis $v_1,...,v_n \in V$ von V. Die Zusammensetzung der Endomorphismen entspricht dabei der Multiplikation der Matrizen,

$$M(f\circ g) = M(f)\bullet M(g).$$

Wir bezeichnen mit f_{ij} die k-lineare Abbildung

$$f_{ij}: V \longrightarrow V \text{ mit } f_{ij}(v_\ell) = \begin{cases} v_i \text{ für } \ell = j \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

Die Matrix von f_{ij} ist die Matrix

$$M(f_{ij}) = E_{ij}$$

deren einziger von 0 verschiedener Eintrag sich in der Position (i,j) befindet und gleich 1 ist:

$$E_{ij}\bullet e_j = e_i \text{ und } E_{ij}\bullet e_\ell = 0 \text{ für } \ell \neq j.$$

Die f_{ij} bilden eine k-Vektorraumbasis von E und die E_{ij} eine k-Vektorraumbasis von $\mathbf{M}_n$. Wir bezeichnen mit

$$T_{ij}: \mathbf{M}_n \longrightarrow k$$

die Vektoren der zur Basis der E_{ij} dualen Basis,

$$T_{ij}(E_{uv}) = \delta_{iu}\bullet\delta_{jv}.$$

Die Determinanten

$$\det: \mathbf{M}_n \longrightarrow k$$

ist ein Polynom in den T_{ij}. Weil die T_{ij} als lineare Funktionen im Koordinatenring von $\mathbf{M}_n$, gilt dasselbe für die Determinante,

$$\det \in k[\mathbf{M}_n]$$

Die Zusetzung der Funktion det mit der Abbildung (1) ist ein Element des Koordinatenrings k[E] (weil (1) ein Isomorphismus affiner algebraischer Varietäten ist), welche wir ebenfalls mit det bezeichnen,

$$\det \in k[E].$$

Nach Definition gilt

$$\det(f) = \det M(f) \text{ für jedes } f \in E,$$

d.h. det(f) ist gerade die Determinante des Endomorphismus f und damit unabhängig von der speziellen Wahl der Basis der v_i (durch welche (1) definiert ist). Der durch (1) induzierte Isomorphismus der Koordinatenringe

$$k[T_{ij} \mid i,j=1,...,n] = k[M_n] \longrightarrow k[E]$$

induziert einen Isomorphismus

$$k[\mathbf{GL}_n] = k[\det(T_{ij})^{-1}, T_{ij} \mid i,j=1,...,n] \longrightarrow k[E]_{\det} = k[D(\det)]$$

(für jede beliebige Wahl der Basis der v_i von V und die zugehörige Wahl der Basis de f_{ij} von E). Weil $\mathbf{GL}_n$ die Struktur einer lineare algebraische Gruppe besitzt, gilt dasselbe für die offene Hauptmenge

$$D(f) = \{\varphi\in E \mid \det(\varphi) \neq 0\}$$

von E, die wir deshalb mit

$$\mathbf{GL}(V) = D(f) = \{\varphi\in \mathrm{End}_k(V) \mid \det(\varphi) \neq 0\}$$

bezeichnen. Der obige Isomorphismus der Koordinatenringe zeigt, daß die Einschränkung

$$\phi:\mathbf{GL}_n \longrightarrow \mathbf{GL}(V) \qquad (2)$$

von Abbildung (1) auf $\mathbf{GL}_n$ für jede Wahl der Basis $\{v_i\}$ von V ein Isomorphismus algebraischer Gruppen ist.

4. <u>Schritt</u>. Der k-Algebra-Homomorphismus

$$\tilde{\Delta}: k[\mathbf{GL}(V)] \longrightarrow k[\mathbf{GL}(V)] \otimes_k k[\mathbf{GL}(V)]$$

mit

$$\tilde{\Delta}(\ell)(f \otimes g) = \ell(f \circ g) \text{ für } \ell \in E^* \text{ und } f,g \in E = \mathrm{End}_k\,(V) \qquad (3)$$

ist wohldefiniert und ist gerade die Komultiplikation von $\mathbf{GL}(V)$, d.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} k[\mathbf{GL}(V)] & \xrightarrow{\phi^*} & k[\mathbf{GL}_n] \\ \tilde{\Delta}\downarrow & & \downarrow\Delta \\ k[\mathbf{GL}(V)] \otimes_k k[\mathbf{GL}(V)] & \xrightarrow{\phi^* \otimes \phi^*} & k[\mathbf{GL}_n] \otimes_k k[\mathbf{GL}_n] \end{array} \qquad (4)$$

Dabei seien ϕ die Einschränkung (2) des zur vorgegebenen Basis $\{v_i\}$ von V gehörigen Isomorphismus (1), Δ die Komultiplikation von $\mathbf{GL}_n$. Man beachte, $\tilde{\Delta}$ hängt nicht von der Wahl der Basis $\{v_i\}$ ab.

Abbildung (1) ordnet jedem k-linearen Endomorphismus $f: V \longrightarrow V$ dessen Matrix $M(f)$ bezüglich der Basis $\{v_i\}$ zu und ist nach dem dritten Schritt eine reguläre Abbildung affiner algebraischer Varietäten.

$$\varphi: E = \mathrm{End}(V) \longrightarrow \mathbf{M}_n,\ f \mapsto M(f),$$

Dasselbe gilt für induzierte Abbildung

$$\phi: \mathbf{GL}(V) \longrightarrow \mathbf{GL}_n,\ f \mapsto M(f),$$

auf den durch die Determinante definierten offenen Hauptmengen. Wegen

$$M(f' \circ f'') = M(f') \bullet M(f'') \text{ für } f', f'' \in E$$

erhalten wir kommutative Diagramme

$$\begin{array}{ccccc} E \times E & \xrightarrow{\tilde{\mu}} & E & (f;g) & \mapsto & f \circ g \\ \varphi\times\varphi\downarrow & & \downarrow\varphi & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{M}_n \times \mathbf{M}_n & \xrightarrow{\mu} & \mathbf{M}_n & (M(f),M(f)) & \mapsto & M(f)\bullet M(g)=M(f\circ) \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{GL}(V) \times \mathbf{GL}(V) & \xrightarrow{\tilde{\mu}} & \mathbf{GL}(V) & (f;g) & \mapsto & f \circ g \\ \phi\times\phi\downarrow & & \downarrow\phi & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{GL}_n \times \mathbf{GL}_n & \xrightarrow{\mu} & \mathbf{GL}_n & (M(f),M(f)) & \mapsto & M(f)\bullet M(g)=M(f\circ) \end{array}$$

wobei $\tilde{\mu}$ die Multiplikation die Zusammensetzung von Abbildungen und μ die Multiplikation von Matrizen bezeichnet. Das zweite Diagramm entsteht durch Einschränken der Abbildungen des ersten auf geeignete offene Hauptmengen. Die Abbildungen des zweiten Diagramms sind Gruppen-Homomorphismen. Die Abbildungen des zweiten Diagramms sind als Einschränkungen durch die des ersten eindeutig bestimmt.

Wir gehen zu den Koordinatenringen über und erhalten die kommutativen Diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
k[E] & \xrightarrow{\tilde{\mu}^*} & k[E\times E] & \ell \mapsto & \ell\circ\tilde{\mu} \\
\varphi^*\uparrow & & \uparrow(\varphi^{\sim}\times\varphi)^* & \downarrow & \downarrow \\
k[\mathbf{M}_n] & \xrightarrow{\mu^*} & k[\mathbf{M}_n\times\mathbf{M}_n] & \ell\circ\phi \mapsto & \ell\circ\phi\circ\mu=\ell\circ\tilde{\mu}\circ(\phi\times\phi)
\end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccccc}
k[\mathbf{GL}(V)] & \xrightarrow{\tilde{\mu}^*} & k[\mathbf{GL}(V)\times\mathbf{GL}(V)] & \ell \mapsto & \ell\circ\tilde{\mu} \\
\phi^*\uparrow & & \uparrow(\phi\times\phi)^* & \downarrow & \downarrow \\
k[\mathbf{GL}_n] & \xrightarrow{\mu^*} & k[\mathbf{GL}_n\times\mathbf{GL}_n] & \ell\circ\phi \mapsto & \ell\circ\phi\circ\mu=\ell\circ\tilde{\mu}\circ(\phi\times\phi)
\end{array}$$

Auch hier sind die Abbildungen des zweiten Diagramms durch die des ersten eindeutig bestimmmt. Genauer: die natürlichen Einbettungen

$$\mathbf{GL}(V) = D(\det) \hookrightarrow E = \mathrm{End}(V) \text{ und } \mathbf{GL}_n = D(\det) \hookrightarrow \mathbf{M}_n$$

induzieren die natürlichen Abbildungen[1]

$$k[E] \hookrightarrow k[E]_{\det} = k[\mathbf{GL}(V)] \text{ und } k[\mathbf{M}_n] \hookrightarrow k[\mathbf{M}_n]_{\det} = k[\mathbf{GL}_n]$$

in die Quotientenringe bezüglich der Potenzen der Determinante und die Abbildungen des zweiten Diagramms sind gerade die Fortsetzungen auf die Quotientenringe der Abbildungen des ersten.

Somit reicht es zum Beweis der Korrektheit der Definition von $\tilde{\Delta}$ und der Kommutativität des Diagramms (4) zu zeigen, daß für die Einschränkung

$$\tilde{\mu}^*: k[E] \longrightarrow k[E\times E]$$

der Komultiplikation von $\mathbf{GL}(V)$ auf k[E] Bedingung (3) mit $\tilde{\mu}^*$ anstelle von $\tilde{\Delta}$ erfüllt ist und daß $\tilde{\mu}^*$ durch diese Bedingung eindeutig bestimmt ist.
Nun wissen wir, daß das Dual

$$E^* \subseteq k[E] \text{ bzw. } \mathbf{M}_n^* \subseteq k[\mathbf{M}_n]$$

des k-Vektorraums E bzw. $\mathbf{M}_n$ im Koordinatenring von E bzw. $\mathbf{M}_n$ liegt und diesen Koordinatenring als k-Algebra erzeugt (nach dem zweiten Schritt). Alle beteiligten Abbildungen sind k-Algebra-Homomorphismen. Es reicht daher die Einschränkungen der Abbildungen des ersten Diagramms auf diese Unterräume zu betrachten, d.h. das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
E^* & \xrightarrow{\tilde{\mu}^*} & k[E\times E] & \ell \mapsto & \ell\circ\tilde{\mu} \\
\varphi^*\uparrow & & \uparrow(\varphi\times\varphi)^* & \downarrow & \downarrow \\
\mathbf{M}_n^* & \xrightarrow{\mu^*} & k[\mathbf{M}_n\times\mathbf{M}_n] & \ell\circ\phi \mapsto & \ell\circ\phi\circ\mu=\ell\circ\tilde{\mu}\circ(\phi\times\phi)
\end{array}$$

Da φ ein Isomorphismus ist, d.h. $\tilde{\mu}^*$ ist durch μ^* und die Kommutativität dieses Diagramms eindeutig festgelegt, reicht es zu zeigen, dieses Diagramm bleibt kommutativ, wenn wir $\tilde{\mu}^*$ durch $\tilde{\Delta}$ ersetzen. Dabei können wir noch die

[1] Die Abbildungen in die Quotientenringe sind injektiv, weil $k[E] \cong k[T_{ij} \mid i,j=1,\dots,n] \cong k[\mathbf{M}_n]$ nullteilerfrei sind.

Koordinatenringe der direkten Produkte durch die Tensorprodukte der Koordinatenringe der Faktoren ersetzen, d.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E^* & \xrightarrow{\widetilde{\Delta}} & k[E]\otimes_k k[E] \\ \varphi^*\uparrow & & \uparrow \varphi^*\otimes\varphi^* \\ \mathbf{M}_n^* & \xrightarrow{\mu^*} & k[\mathbf{M}_n]\otimes_k k[\mathbf{M}_n] \end{array}$$

betrachten. Die Abbildungen des Diagramms sind k-linear. Sie sind also durch ihre Werte auf einer Basis bereits festgelegt.
Sei

$$f_{ij}: V \longrightarrow V$$

die k-lineare Abbildung mit

$$f_{ij}(v_\ell) = \begin{cases} v_i & \text{für } \ell = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{d.h. } f_{ij}(v_\ell) = \delta_{\ell j}\cdot v_i$$

Dann bilden die f_{ij} eine Basis von E. Wir bezeichnen die Elemente der dualen Basis mit

$$g_{ij} \in E^*, \text{ d.h. } g_{ij}(f_{uv}) = \delta_{iu}\cdot\delta_{jv}.$$

Die Matrix

$$E_{ij} := M(f_{ij})$$

von f_{ij} bezüglich der Basis der v_i hat den einzigen von 0 verschiedenen Eintrag in der Position (i,j), und dieser ist gleich 1. Die E_{ij} bilden eine Basis von $\mathbf{M}_n$. Die Elemente der dualen Basis bezeichnen wir mit

$$T_{ij} \in \mathbf{M}_n^*, \text{ d.h. } T_{ij}(E_{uv}) = \delta_{iu}\cdot\delta_{jv}.$$

Nach 2.1.4 Beispiel 3 ist die Komultiplikation μ^* von $\mathbf{GL}_n$ der k-Algebra-Homomorphismus

$$\Delta=\mu^*: k[T_{ij} \mid i,j=1,...,n]_{det} = k[\mathbf{GL}_n] \longrightarrow k[\mathbf{GL}_n]\otimes_k k[\mathbf{GL}_n]$$

mit

$$\Delta(T_{ij}) = \sum_{\ell=1}^{n} T_{i\ell}\otimes T_{\ell j}$$

Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen, für alle i und j gilt

$$\widetilde{\Delta}(\phi^*(T_{ij})) = (\phi^*\otimes \phi^*)(\Delta(T_{ij})),$$

Wegen

$$\varphi^*(T_{ij})(f_{uv}) = (T_{ij}\circ\varphi)(f_{uv}) = T_{ij}(E_{uv}) = \delta_{iu}\cdot\delta_{jv} = g_{ij}(f_{uv})$$

für alle u und v, gilt $\varphi^*(T_{ij}) = g_{ij}$. Wir haben also zu zeigen,

$$\widetilde{\Delta}(g_{ij}) = \sum_{\ell=1}^{n} g_{i\ell}\otimes g_{\ell j},$$

d.h.

$$\widetilde{\Delta}(g_{ij})(f\otimes g) = (\sum_{\ell=1}^{n} g_{i\ell}\otimes g_{\ell j})(f\otimes g),$$

d.h.

$$g_{ij}(f\circ g) = \sum_{\ell=1}^{n} g_{i\ell}(f)\cdot g_{\ell j}(g),$$

für alle f,g $\in$ E = End(V). Da beide Seiten k-linear in f und g sind, können wir und auf den Fall beschränken, daß f und g Elemente einer vorgegebenen Basis sind, also zum Beispiel auf den Fall

$$f = f_{rs} \text{ und } g = f_{uv}.$$

Dann ist die linke Seite gleich

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= g_{ij}(f_{rs}\circ f_{uv}) \\ &= g_{ij}(\delta_{su}\cdot f_{rv}) && \text{(nach Definition der } f_{ij}) \\ &= \delta_{su}\cdot g_{ij}(f_{rv}) && (g_{ij} \text{ ist linear}) \\ &= \delta_{su}\cdot\delta_{ir}\cdot\delta_{jv} && \text{(Definition von } g_{ij}) \end{aligned}$$

Für die rechte Seite erhalten wir

$$\begin{aligned} \text{RHS} &= \sum_{\ell=1}^{n} g_{i\ell}(f_{rs})\cdot g_{\ell j}(f_{uv}) \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} \delta_{ir}\cdot\delta_{\ell s}\cdot\delta_{\ell u}\cdot\delta_{jv} && \text{(Definition von } g_{ij}) \end{aligned}$$

Das Produkt unter der Summe ist nur dann von Null verschieden, wenn ℓ = s und ℓ = u gilt, d.h. der einzige eventuel von Null verschiedene Summand ist

$$\delta_{ir}\cdot\delta_{su}\cdot\delta_{jv} = \text{LHS}$$

Die beiden Seiten sind also gleich.

5. <u>Schritt</u>. Der k-Algebra-Homomorphismus

$$\tilde{\iota}: k[\mathbf{GL}(V)] \longrightarrow k[\mathbf{GL}(V)]$$

mit

$$\tilde{\iota}(\ell)(f) = \ell(f^{-1}) \text{ für } \ell\in E^* \text{ und } f \in E = \mathrm{End}_k(V) \tag{5}$$

ist wohldefiniert und ist gerade der Antipode von **GL**(V), d.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} k[\mathbf{GL}(V)] & \overset{\phi^*}{\longleftarrow} & k[\mathbf{GL}_n] \\ \tilde{\iota}\downarrow & & \downarrow\iota \\ k[\mathbf{GL}(V)] & \overset{\phi^*}{\longleftarrow} & k[\mathbf{GL}_n] \end{array} \tag{6}$$

Dabei seien ϕ die Einschränkung (2) des zur vorgegebenen Basis $\{v_i\}$ von V gehörigen Isomorphismus (1), ι die Antipode von $\mathbf{GL}_n$. Man beachte, $\tilde{\iota}$ hängt nicht von der Wahl der Basis $\{v_i\}$ ab.

Wir haben zu zeigen

$$\tilde{\iota}(\ell\circ\phi)(f) = (\iota(\ell)\circ\phi)(f) \text{ für } f\in\mathbf{GL}(V) \text{ und } \ell \in k[\mathbf{GL}_n],$$

d.h.

$$\ell(M(f^{-1})) = \iota(\ell)(M(f)). \tag{7}$$

Dabei können wir uns auf den Fall beschränken, daß ℓ ein Erzeugendensystem der k-Algebra $k[\mathbf{GL}_n]$, d.h. auf den Fall

$$\ell \in \{T_{ij} \mid i,j = 1,...,n\} \bigcup \{\det(T)^{-1}\}$$

Nach 2.1.4 Beispiel 3 ist der Antipode von $\mathbf{GL}_n$ der k-Algebra-Homomorphismus

$$\iota: k[T_{ij} \mid i,j=1,...,n]_{\det} = k[\mathbf{GL}_n] \longrightarrow k[\mathbf{GL}_n]$$

mit

$$\iota(T_{ij}) = \det(T)^{-1} \cdot A_{ji}(T),$$

wenn T die Matrix der T_{ij} bezeichnet und $A_{ij}(T)$ die adjungierte Unterdeterminante der Matrix T zur Position (i,j). Weil ι ein k-Algebra-Homomorphismus ist und det(T) ein Polynom in den T_{ij}, folgt

$$\begin{aligned}
\iota(\det(T)) &= \det(\iota(T_{ij}))_{i,j=1,...,n} \\
&= \det\,(\det(T)^{-1}(A_{ji}(T)))_{\;i,j=1,...,n} \\
&= \det\,(T^{-1}) \\
&= \det(T)^{-1}
\end{aligned}$$

Für $\ell = T_{ij}$ hat die linke Seite von (7) die Gestalt

$$\begin{aligned}
\text{LHS} &= T_{ij}(M(f^{-1})) \\
&= \det(M(f))^{-1} \cdot A_{ji}(M(f)). \qquad \text{(Formel für die Umkehrmatrix)}
\end{aligned}$$

Für die rechte Seite von (7) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\text{RHS} &= \iota(T_{ij})(M(f)) \\
&= (\det(T)^{-1} \cdot A_{ji}(T))(M(f)) \qquad \text{(Definition von } \iota) \\
&= \det(M(f))^{-1} \cdot A_{ji}(M(f)) \\
&= \text{LHS}.
\end{aligned}$$

Ist $\ell = \det(T)^{-1}$, so erhalten wir für die rechte Seite von (7):

$$\begin{aligned}
\text{RHS} &= \iota(\det(T)^{-1})(M(f)) \\
&=^{2} \iota(\det(T))^{-1}(M(f)) \\
&= \det(T)(M(f)) \qquad \text{(obige Berechnung von } \iota(\det(T))) \\
&= \det(M(f)) \\
\text{LHS} &= \det(T)^{-1}(M(f^{-1})) \\
&= \det(M(f^{-1}))^{-1} \\
&= \det(M(f)) \qquad \text{(Produktsatz für Determinanten)} \\
&= \text{RHS}.
\end{aligned}$$

<u>Zu (b)</u>. Mit

$$F[\mathbf{GL}(V)] := S_F(\mathrm{End}_F(V_0)^*)$$

gilt

$$F[\mathbf{GL}(V)] \otimes_F k = S_k(E^*) = k[\mathbf{GL}(V)].$$

---

[2] Wegen $\det(T) \cdot \det(T)^{-1} = 1$ und weil ι ein Ring-Homomorphismus ist.

Das liegt daran, das $S_F(End_F(V_0)^*)$ dieselbe Universalitätseigenschaft über F besitzt wie $S_k(E^*)$ über k.
Wenn man k durch F und E durch $E_0 := End_F(V_0)$ ersetzt lassen sich Komultiplikation und Antipode in derselben Weise wie oben über F konstruieren. Anstelle der Diagramme von k-Algebra-Homomorphismen, welche die Gruppen-Struktur von GL(V) beschreiben, erhält man Diagramme von F-Algebren, welche nach Anwenden des Funktors $\otimes_F k$ kommutativ werden. Diese Diagramme sind deshalb selbst schon kommutativ. Die Kommutativität dieser Diagramme hat zur Folge, daß

$$GL(V)(F) := Hom_{F\text{-}Alg}(F[GL(V)], F)$$

eine Gruppenstruktur hat: durch Anwenden des kontravarianten Funktors Hom(?,F) auf diese Diagramme, erhält man die Diagramme von Bemerkung 2.1.1.1 (vi) mit GL(V)(F) anstelle von G, deren Kommutativität äquivalent ist zu den Gruppen-Axiomem für GL(V)(F).
QED.

2.1.5 Aufgabe 2

Überprüfen Sie, ob die Untergruppen der $\mathbf{GL}_n$ von 2.1.4 Beispiel 4 tatsächlich abgeschlossen sind in $\mathbf{GL}_n$.

Beweis. Wir haben zu zeigen, diese Untergruppen sind als Teilmengen der GL_n durch polynomiale Gleichungen definierrt.

Zu (a). Die endlichen Untergruppen der $\mathbf{GL}_n$.

Jede einpunktige Menge einer algebraischen Menge X ist abgeschlossen, denn für x ∈ X gilt

$$\{x\} = V(M_x)$$

Dabei sei M_x das maximale Ideal der Funktionen von k[X] mit der Nullstelle x. Damit ist aber auch jede endliche Teilmenge von X abgeschlossen.

Zu (b). Die Gruppe $\mathbf{D}_n$ der nicht-singulären Diagolnalmatrizen.
Es gilt

$$\mathbf{D}_n = \{(x_{ij}) \in \mathbf{GL}_n \mid x_{ij} = 0 \text{ für } i \neq j\},$$

d.h. $\mathbf{D}_n$ besteht aus den gemeinsamen Nullstellen in $\mathbf{GL}_n$ der linearen Polynome x_{ij} mit $i \neq j$.

Zu (c). Die Gruppe $\mathbf{T}_n$ der oberen Dreiecksmatrizen .

$$\mathbf{T}_n = \{ (x_{ij}) \in \mathbf{GL}_n \mid x_{ij}=0 \text{ für } i > j \}.$$

Zu (d). Die Gruppe $\mathbf{U}_n$ der unipotenten oberen Dreiecksmatrizen.
Es gilt

$$\mathbf{U}_n = \{ (x_{ij}) \in \mathbf{T}_n \mid x_{ii} - 1 = 0 \text{ für } i = 1,..., n \},$$

d.h. $\mathbf{U}_n$ ist abgeschlossen in $\mathbf{T}_n$. Weil $\mathbf{T}_n$ abgeschlossen in $\mathbf{GL}_n$ ist, ist damit auch $\mathbf{U}_n$ abgeschlossen in $\mathbf{GL}_n$.
Zu (e). Die spezielle lineare Gruppe $\mathbf{SL}_n$.

Es gilt

$$\mathbf{SL}_n = \{ x \in \mathbf{GL}_n \mid \det(x) - 1 = 0 \}.$$

Weil die Determinante einer Matrix ein Polynom der Einträge dieser Matrix ist, ist $\mathbf{SL}_n$ abgeschlossen in $\mathbf{GL}_n$.

Zu (f). Die orthogonale Gruppe $\mathbf{O}_n$.

$$\begin{aligned}\mathbf{O}_n &= \{ x \in \mathbf{GL}_n \mid x^T \bullet x = 1 \} \\ &= \{ (x_{ij}) \in \mathbf{GL}_n \mid \sum_{\nu=1}^{n} x_{\nu i} x_{\nu j} = \delta_{ij} \text{ für } i,j = 1,\dots,n \}\end{aligned}$$

Zu (g). Die spezielle orthogonale Gruppe $\mathbf{SO}_n$.

$$\begin{aligned}\mathbf{SO}_n &= \mathbf{O}_n \cap \mathbf{SL}_n \\ &= \{ x \in \mathbf{O}_n \mid \det(x) = 1 \} \\ &= \{ (x_{ij}) \in \mathbf{GL}_n \mid \sum_{\nu=1}^{n} x_{\nu i} x_{\nu j} = \delta_{ij} \text{ für } i,j = 1,\dots,n \text{ und } \det(x_{ij}) = 1 \}\end{aligned}$$

Zu (h). Die symplektische Gruppe $\mathbf{Sp}_{2n}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{Sp}_{2n} &= \{ x \in \mathbf{GL}_n \mid x^T \bullet J \bullet x = 1 \} \\ &= \{ (x_{ij}) \in \mathbf{GL}_n \mid \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} x_{\mu i} \bullet a_{\mu\nu} \bullet x_{\nu j} = \delta_{ij} \text{ für } i,j=1,\dots,n \}\end{aligned}$$

Dabei seien die a_{ij} die Einträge der Matrix

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}.$$

QED.

2.1.5 Aufgabe 3

Es gilt

$$A := k[\mathbf{SL}_2] \cong k[T_1,T_2,T_3,T_4]/(T_1 \bullet T_4 - T_2 \bullet T_3 - 1) = k[t_1,t_2,t_3,t_4]$$

wobei t_i die Restklasse von T_i bezeichnet. Sei B die von den Produkten

$$t_i t_j \text{ mit } i,j=1,\dots,4$$

erzeugte Teilalgebra von A über k,

$$B := A[t_1^2, t_1t_2, t_1t_3, t_1t_4, t_2^2, t_2t_3, t_2t_4, t_3^2, t_3t_4, t_2^2] \; (\subseteq A).$$

(a) Seien Δ und ι die k-Algebra-Homomorphismen, welche die Gruppen-Struktur der $\mathbf{SL}_2$ definieren. Zeigen Sie, es gilt

$$\Delta(B) \subseteq B \otimes B \text{ und } \iota(B) = B.$$

Verwenden Sie dies, um zu zeigen, daß es eine lineare algebraische Gruppe $\mathbf{PSL}_2$ gibt mit dem Koordinatenring B.

Zeigen Sie, die natürliche Inklusion $B \hookrightarrow A$ definiert einen Homomorphismus algebraischer Gruppen

$$\mathbf{SL}_2 \longrightarrow \mathbf{PSL}_2$$

mit einem Kern der Ordnung ≤ 2.

(b) Ist char(k) $\neq$ 2, so besteht B aus den Funktionen $f \in A$ mit $f(x) = f(-x)$ für jeden Punkt $x \in \mathbf{SL}_2$.

(c) Ist char(k) = 2, so definiert der Homomorphismus von (a) einen Isomorphismus der abstrakten Gruppen, der jedoch kein Isomorphismus algebraischer Gruppen ist.

Beweis. Irreduzibilität des Polynoms

$$\det(T) - c$$

im Fall einer n×n-Matrix $T = (T_{ij})$ von Unbestimmten für jede Konstante c.

Erster Beweis.

Angenommen, det(T)-1 zerfällt in ein Produkt von Polynomen, sagen wir

$$\det(T)-1 = f(T)\cdot g(T).$$

Als Polynom in einem einzigen T_{ij} ist det(T)-1 linear. Deshalb kommt jedes T_{ij} auf der rechten Seite in nur einem der Faktoren vor.

Sind T_{ij} und T_{uv} zwei Unbestimmte aus derselben Zeile oder derselben Spalte von T, so können diese nicht in verschiedenen Faktoren rechts vorkommen, denn dann würde auch deren Produkt vorkommen. Das aber widerspricht der Determinanten-Definition von Leibniz, nach welcher det(T) eine vorzeichenbehaftete Summe von Produkten ist, in denen aus jeder Zeile und jeder Spalte genau ein Faktor vorkommt.

Sind T_{ij} und T_{rs} zwei Unbestimmte aus unterschiedlichen Zeilen und unterschiedlichen Spalten von T, so gibt es eine Unbestimmte T_{uv} welche mit dem einen Faktor eine Zeile und dem anderen Faktor eine Spalte gemeinsam hat. Wie eben bemerkt, liegen dann T_{ij} und T_{uv} im selben Faktor. Dasselbe gilt aber auch für T_{rs} und T_{uv}. Daher liegen auch T_{ij} und T_{rs} im selben Faktor.

Zusammen ergibt sich, daß alle Unbestimmten im selben Faktor liegen, d.h. der andere Faktor ist eine Konstante. Dies beweist die Irrduzibilität von det (T) - c.

Zweiter Beweis der Irreduzibilität von det(T)-c (nur für den Fall c $\neq$ 0).

Wir führen den Beweis durch Induktion nach n.

Induktionsanfang: n = 1.

Die Determinante der 1×1-Matrix (T_{11}) ist gleich T_{11}. Das Polynom

$$\det(T_{11}) - c \in k[T_{11}]$$

ist als lineares Polynom in einer Unbestimmten über einem Körper irreduzibel.

Induktionsschritt: n > 1.

Wir betrachten f = det(T)-c als Polynom in T_{11} mit Koeffizienten aus dem Polynomring

$$R' := k[T_{ij} \mid i,j = 1,..., n \text{ und } (i,j) \neq (1,1)\,]$$

in den übrigen Koeffizienten. Nach dem Entwicklunssatz ist f als Polynom in T_{11} linear, sagen wir

$$f = a\cdot T_{11} + b \text{ mit } a, b \in R'$$

Zum Beweis der Irrduzibilität reicht es zu zeigen,

1. f ist irreduzibel als Polynom über dem Quotientenring von R'.

2. Der größte gemeinsame Teiler der Koeffizienten von f (in R') ist 1.
(vgl. Lang [2], Kapitel 5, §6, Theorem 10).

Zu 1. f ist irreduzibel als Polynom in T_{11} über dem Quotientenkörper von R', wie jedes Polynom vom Grad 1 in einer Unbestimmten über einem Körper.

Zu 2. Der Koeffizient a von T_{11} ist die Determinate einer (n-1)×(n-1)-Matrix in gewissen T_{ij} und als solches nach Induktionsvoraussetzung irreduzibel:

$$a \in \text{ ist irreduzibel in } k[T_{ij} \mid i,j = 2,..., n]$$

(also auch in R' und in R). Das Absolutglied b von f hat die Gestalt

$$b = b_2 \cdot T_{12} + ... + b_n \cdot T_{1n} - c.$$

Dabei ist b_i bis aufs Vorzeichen die Determinante einer (n-1)×(n-1)-Matrix in gewissen T_{ij} und damit ein homogenes Polynom des Grades n-1 > 0 in gewissen T_{ij}. Insbesondere hat b_i das Absolutgliede 0 für jedes i. Das bedeutet aber,

b hat als Polynom von R' das Absolutglied -c.

Angenommen a und b besitzten einen nicht-konstanten gemeinsamen Teiler, sagen wir

$$d \mid a \text{ und } d \mid b.$$

Wegen d | a und a irreduzibel ist d bis auf einen konstanten von 0 verschiedenen Faktor gleich a. Wir können deshalb annehmen

$$d = a.$$

Dann gilt a | b, also

$$b = a \cdot f$$

mit einem Polynom f in den T_{ij}. Als homogenes Polynom des Grades n-1 > 0 in gewissen T_{ij} hat a das Absolutglied 0. Dasselbe gilt dann aber auch für a•f. Das steht aber im Widerspruch dazu, daß b das Absolutglied -c besitzt. Die Annahme, daß die Koeffizienten a und b einen nicht-konstanten gemeinsamen Teiler besitzen muß also falsch sein, d.h. es gilt 2.

Berechnung des Koordinatenrings von $\mathbf{SL}_2$.

Nach Definition gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{SL}_2 &= \{ x \in \mathbf{GL}_2 \mid \det(x) - 1 = 0 \} && \text{(vgl. . 2.1.4 Beispiel 4 (e))} \\ &= \{ x \in \mathbf{M}_2 \mid \det(x) - 1 = 0 \}, \end{aligned}$$

d.h. als Teilmenge der afffinen Varietät $\mathbf{M}_2 \cong \mathbb{A}^4$ ist $\mathbf{SL}_2$ gerade die abgeschlossenene Teilmenge

$$\mathbf{SL}_2 = V(\det(T) - 1) \subseteq \mathbb{A}^4$$

hat also den Koordinatenring

$$\begin{aligned} k[\mathbf{SL}_2] &= R/I(V(\det(T) - 1)) \text{ mit } R := k[T_{ij} \mid i,j = 1,2] \\ &= R/\sqrt{(\det(T)-1)\cdot R} \end{aligned}$$

(vgl. 1.1.2 (ii)). Weil, wie gerade gezeigt, det(T)-1 irreduzibel ist, gilt

$$\sqrt{(\det(T)-1)\cdot R} = (\det(T)-1)\cdot R.$$

Sei S eine weitere Unbestimmte. Dann gilt

$$k[\mathbf{SL}_2] = R/(\det(T) - 1) \qquad \text{(Definition von } \mathbf{SL}_2\text{, Irrduzibilität von det(T)-1)}$$
$$= k[T_{11},T_{12},T_{21},T_{22}, \det(T)^{-1}]/(\det(T) - 1)$$
$$\cong k[T_{11},T_{12},T_{21},T_{22}, S]/(S\bullet\det(T) - 1, \det(T) - 1)$$
$$= k[T_{11},T_{12},T_{21},T_{22}, S]/(S - 1, \det(T) - 1)$$
$$\cong k[T_{11},T_{12},T_{21},T_{22}]/(\det(T) - 1).$$

Mit $T_1 := T_{11}$, $T_2 := T_{12}$, $T_3 := T_{21}$, $T_4 = T_{22}$ erhatlen wir

$$k[\mathbf{SL}_2] \cong k[T_1,T_2,T_3,T_4]/(T_1\bullet T_4-T_2\bullet T_3-1).$$

Bezeichnet t_{ij} die Restklasse von T_{ij}, können wir auch schreiben

$$k[\mathbf{SL}_2] \cong k[t_{11},t_{12},t_{21},t_{22}].$$

Zu (a). Der k-Algebra-Homomorphismus Δ: A $\longrightarrow$ A$\otimes$A ist induziert durch die Komultiplikation der $\mathbf{GL}_2$ welche T_{ij} abbildet in $\sum_{\nu=1}^{2} T_{i\nu}\otimes T_{\nu j}$. Es gilt also

$$\Delta(t_{ij}) = \sum_{\nu=1}^{2} t_{i\nu}\otimes t_{\nu j}.$$

Nach Definition wird B als k-Algebra von den Produkten der Gestalt $t_{ij}\bullet t_{i'j'}$ erzeugt. Weil Δ ein k-Algebra-Homomorphismus ist folgt

$$\Delta(t_{ij}\bullet t_{i'j'}) = \Big(\sum_{\mu=1}^{2} t_{i\mu}\otimes t_{\mu j}\Big)\bullet\Big(\sum_{\mu=1}^{2} t_{i'\nu}\otimes t_{\nu j'}\Big)$$
$$= \sum_{\mu=1}^{2}\sum_{\mu=1}^{2} t_{i\mu}\bullet t_{i'\nu} \otimes t_{\mu j}\bullet t_{\nu j'} .$$

Weil die Produkte $t_{i\mu}\bullet t_{i'\nu}$ und $t_{\mu j}\bullet t_{\nu j'}$ in B liegen, ist die Summe auf der rechten Seite ein Element von B$\otimes$B. Damit liegt aber auch jedes Polynom über k in solchen Summen in B, d.h. es gilt

$$\Delta(B) \subseteq B\otimes B.$$

Analog ist der k-Algebra-Isomorphismus ι: A $\longrightarrow$ A induziert durch den Antipoden der $\mathbf{GL}_2$, welcher T_{ij} abbildet in

$$\det(T)^{-1}\bullet(A_{ji}(T)) = (T_{11}\bullet T_{22} - T_{12}\bullet T_{21})^{-1}\bullet(-1)^{i+j}\bullet T_{3-j,3-i}.$$

Es ist also

$$\iota(t_{ij}) = (t_{11}\bullet t_{22} - t_{12}\bullet t_{21})^{-1}\bullet(-1)^{i+j}\bullet t_{3-j,3-i}$$
$$= (-1)^{i+j}\bullet t_{3-j,3-i} \qquad \left(\text{wegen } \det\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22}\end{pmatrix} = 1\right)$$

Man beachte, es gilt

$$\iota^2(t_{ij}) = (-1)^{i+j}\bullet (-1)^{i+j}\bullet t_{ij} = t_{ij},$$

d.h. ι ist selbstinvers.

Weil ι ein k-Algebra-Homomorphismus ist, folgt

$$\iota(t_{ij}\bullet t_{i'j'}) = (-1)^{i+j+i'+j'}\bullet t_{3-j,3-i}\bullet t_{3-j',3-i'} \in B,$$

also

$$\iota(B) \subseteq B.$$

Weil ι selbstinvers ist, gilt damit auch

$$B = \iota(\iota(B)) \subseteq \iota(B),$$

zusammen also

$$\iota(B) = B.$$

Wegen $\Delta(B) \subseteq B\otimes B$ und $\iota(B) = B$ kann man in den kommutativen Diagrammen, welche die Gruppen-Struktur der $\mathbf{SL}_2$ beschreiben, den Ring $A = k[\mathbf{SL}_2]$ durch den Teilring B ersetzen (und die Homomorphismen durch deren Einschränkungen). Man beachte, der k-Algebra-Homomorphismus

$$e: A \longrightarrow k$$

liefert dabei einen k-Algebra-Homomorphismus $B \longrightarrow k$, der k-Algebra-Homomorphismus

$$m: A\otimes A \longrightarrow A,\ x\otimes y \mapsto x\bullet y,$$

einen k-Algebra-Homomorphismus

$$B\otimes B \longrightarrow B,\ x\otimes y \mapsto x\bullet y,$$

und die natürliche Einbettung $k \hookrightarrow A$ wird zur natürlichen Einbettung $k \hookrightarrow B$.
Weil die k-Algebra B endlich erzeugt ist und als Teilalgebra von A auch reduziert, ist sie der Koordinatenring einer algebraischen Menge, die wir $\mathbf{PSL}_2$ nennen wollen,

$$k[\mathbf{PSL}_2] = B,$$

und die gerade konstruierten kommutativen Diagramme versehen $\mathbf{PSL}_2$ mit der Struktur einer linearen algebraischen Gruppe,

$\mathbf{PSL}_2$ ist eine lineare algebraische Gruppe.

Die natürliche Inklusion $B \hookrightarrow A$ definiert wir jeder k-Algebra-Homomorphismus einen Morphismus affiner Varietäten

$$\pi: \mathbf{SL}_2 \longrightarrow \mathbf{PSL}_2.$$

Nach Konstruktion ist die Komultiplikation Δ' von $\mathbf{PSL}_2$ gerade die Einschränkung der Komultiplikation Δ von $\mathbf{SL}_2$. Genauer, das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\Delta} & A\otimes A \\ \uparrow & & \uparrow \\ B & \xrightarrow{\Delta'} & B\otimes B \end{array}$$

ist kommutativ. Wir gehen zu den zugehörigen Morphismen affiner algebraischer Varietäten über und erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{SL}_2 & \overset{\mu}{\longleftarrow} & \mathbf{SL}_2\times\mathbf{SL}_2 \\ \downarrow\pi & & \downarrow\pi\times\pi \\ \mathbf{PSL}_2 & \overset{\mu'}{\longleftarrow} & \mathbf{PSL}_2\times\mathbf{PSL}_2 \end{array},$$

wobei μ' die Multiplikation von $\mathbf{PSL}_2$ bezeichnet. Die Kommutativität dieses Diagramms bedeutet, daß der Morphismus π ein Gruppen-Homomorphismus ist, und damit ein Homomorphismus von algebraischen Gruppen,

π: $\mathbf{SL}_2 \longrightarrow \mathbf{PSL}_2$ ist ein Homomorphismus von algebraischen Gruppen.

Wir haben noch zu zeigen, der Kern von π besteht aus höchstens zwei Elementen. Dazu betten wir $\mathbf{PSL}_2$ mit Hilfe der Erzeuger $t_{ij}t_{i'j'}$ von B in den affinen Raum ein,

$$\mathbf{PSL}_2 \hookrightarrow k^{10},$$

$$x \mapsto (t_1^2(x), t_1t_2(x), t_1t_3(x), t_1t_4(x), t_2^2(x), t_2t_3(x), t_2t_4(x), t_3^2(x), t_3t_4(x), t_2^2(x))$$

Dabei ist $t_1 := t_{11}$, $t_2 := t_{12}$, $t_3 := t_{21}$, $t_4 = t_{22}$. Die Koordinatenfunktionen des Morphismus

$$\pi: \mathbf{SL}_2 \longrightarrow \mathbf{PSL}_2$$

erhalten wir, indem wir π mit den Koordinatenfunktionen von $t_{ij}t_{i'j'}$ von $\mathbf{PSL}_2$ zusammensetzen. Damit hat π die Gestalt

$$\pi: \mathbf{SL}_2 \longrightarrow \mathbb{A}^{10}$$

mit

$$\pi(\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}) = (x_{ij}x_{i'j'} \mid i,j,i,j' \in \{1,2\} \text{ mit } (i,j) \le (i',j'))$$

Dabei seien die Paare lexikographisch geordnet: $(1,1) < (1,2) < (2,1) < (2,2)$. Aus der Abbildungsvorschrift lesen wir ab, für jede 2×2-Matrix mit der Determinanten 1 gilt

$$\pi(A) = \pi(-A) \quad \text{für } A \in \mathbf{SL}_2.$$

Wir werden die Umkehrung beweisen, d.h. für Matrizen $A,B \in SL_2$ besteht die Implikation

$$\pi(A) = \pi(B) \Rightarrow A = \pm B.$$

Weil π ein Gruppen-Homomorphismus ist, reicht es zu zeigen,

$$\pi(\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}) \in \mathrm{Ker}(\pi) \Rightarrow \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sei also

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(\pi),$$

Dann gilt

$$\pi(\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}) = \pi(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}).$$

Die Bilder haben dieselben Koordinaten, d.h.für beliebige i und j gilt

$$x_{ij}^2 = \delta_{ij}^2 ,$$

also

$$x_{ij}^2 = \delta_{ij}$$

also

$$x_{11} = \pm 1,\ x_{22} = \pm 1,\ x_{12} = x_{21} = 0.$$

Wir haben noch zu zeigen, daß x_{11} und x_{22} dasselbe Vorzeichen haben. Das ist aber so, denn es gilt

$$x_{11}\bullet x_{22} = \delta_{11}\bullet\delta_{22} = 1\bullet 1 = 1.$$

Damit kennen wir den Kern von π,

$$\mathrm{Ker}(\pi) = \{\pm\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\}.$$

Man beachte, in der Charakteristik 2 ist dies eine einelementige Menge, d.h. im Fall char(k) = 2 ist π injektiv.

Zu (b). Für jede Matrix $x = \begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix} \in \mathbf{SL}_2$ gilt

$$t_{ij}(x) = x_{ij}$$

$$t_{ij}t_{i',j'}(x) = x_{ij}\bullet x_{i',j'} = (-x_{ij})\bullet(-x_{i',j'}) = t_{ij}t_{i',j'}(-x).$$

Da die $t_{ij}t_{i',j'}$ die k-Algebra B erzeugen, folgt

$$f(x) = f(-x) \qquad \text{für jedes } f \in B \text{ und jedes } x \in \mathbf{SL}_2.$$

Sei jetzt umgekehrt $f \in A$ eine Funktion mit $f(x) = f(-x)$ für jedes $x \in SL_2$. Wir schreiben f in der Gestalt

$$f = f_0 + f_1$$

wobei f_0 eine Linearkombination über k von Potenzprodukten geraden Grades in den t_{ij} und f_1 eine Linearkombination über k von Potenzprodukten ungeraden Grades in den t_{ij} sein soll. Dann gilt für jedes $x \in \mathbf{SL}_2$:

$$f(x) = f_0(x) + f_1(x) \text{ und}$$

$$f(x) = f(-x) = f_0(x) - f_1(x)$$

also

$$2\bullet f(x) = 2\bullet f_0(x).$$

Wegen char(k) $\neq$ 2 ist $2 \in k$ eine Einheit. Wir können mit dem Inversen mulitplizieren und erhalten

$$f(x) = f_0(x) \text{ für jedes } x \in \mathbf{SL}_2,$$

also $f = f_0$ in A, also $f = f_0 \in B$.

Zu (c). Weil

$$B \subsetneq A$$

ein echter Teilring von A ist, ist der durch die natürliche Einbettung

$$B \hookrightarrow A$$

induzierte Morphismus von affinen Varietäten

$$\pi\colon \mathbf{SL}_2 \longrightarrow \mathbf{PSL}_2$$

kein Isomorphismus von Varietäten (vgl. Bemerkung 1.4.7 (vi)).

Wie bereits erwähnt ist

$$\mathrm{Ker}(\pi) = \{\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}.$$

im Fall der Charakteristik 2 eine einelementige Menge, d.h.

$$\pi\colon \mathbf{SL}_2 \longrightarrow \mathbf{PSL}_2$$

ist dann injektiv.

Es reicht also zu zeigen, daß π surjektiv ist. Sei $y \in \mathbf{PSL}_2$. Betrachten wir den Homomorphismus von k-Algebren

$$\beta\colon B \longrightarrow k,\ f \mapsto f(y).$$

Es reicht zu zeigen, dieser läßt sich fortsetzen zu einem k-Algebra-Homomorphismus

$$\alpha\colon A \longrightarrow k,$$

denn dieser hat dann nach 1.3.4(3) die Gestalt $f \mapsto f(x)$ mit einem Punkt $x \in \mathbf{SL}_2$. Weil α den Homomorphismus β fortsetzt, gilt $\mathrm{Ker}(\alpha) \cap B = \mathrm{Ker}(\beta)$, also

$$M_x \cap B = M_y\ ,$$

also $\pi(x) = y$ (vgl. den Beweis von Bemerkung 1.4.7 (iii)). Beweisen wir also die Fortsetzbarkeit von β zu einem k-Algebra-Homomorphismus α. Dazu wiederrum reicht es, die folgenden Aussage zu beweisen:

> Für jedes maximale Ideal q von B gibt es ein maximales Ideal p von A mit $q=p\cap B$.

Nach Definition von B liegen die Quadrate der Erzeuger t_{ij} von A in B. Dann liegen aber auch die Quadrate beliebiger Potenzprodukte der t_{ij} in B. Weil die Charakteristik gleich 2 ist, liegen damit auch die Quadrate beliebiger Linearkombinationen dieser Potenzprodukte in B, d.h. es gilt

$$f^2 \in B \text{ für jedes } f \in A.$$

Für ein vorgegebenes maximales Ideal q von B setzen wir

$$p := \{f \in A \mid f^2 \in q\}.$$

Weil die Charakteristik gleich 2 ist, ist p ein Ideal von A. Für zwei Elemente $a', a'' \in A$ mit $a'a'' \in p$ gilt $a'^2 \bullet a''^2 \in q$. Weil q ein maximales Ideal - also ein Primideal - ist, folgt $a'^2 \in q$ oder $a''^2 \in q$, also $a' \in p$ oder $a'' \in p$. Wir haben gezeigt, p ist ein Primideal von A. Außerdem gilt

$$q = p \cap B.$$

<u>Beweis von</u> "$\subseteq$". für $f \in q$ gilt $f^2 \in q$, also $f \in p$, d.h. $f \in p\cap B$.

<u>Beweis von</u> "$\supseteq$". für $f \in p\cap B$ gilt $f^2 \in q$. Wegen $f \in B$ und q maximales Ideal folgt $f \in q$.

Es bleibt noch zu zeigen, p ist maximal in A. Wegen $q = p\cap B$ induziert die natürliche Einbettung $B \hookrightarrow A$ einen injektiven Homomorphismus $B/q \longrightarrow A/p$. Dabei ist A/p eine endlich erzeugte und nullteilerfreie Algebra über dem Körper B/q. Das Quadrat jedes Elements von A/p liegt in B/q. Damit ist A/p sogar eine endliche algebraisiche Erweiterung von B/q (d.h. als B/q-Vektorraum von endlicher Dimension) und damit ein Körper. Wir haben gezeigt, p ist ein maximales Ideal von A.

QED.

Bemerkung

Die Aussage, daß die Abbildung π: $\mathbf{SL}_2 \longrightarrow \mathbf{PSL}_2$ surjektiv ist, gilt auch im allgemeinen Fall. Das liegt daran, daß die k-Algebra A eine sogenannt <u>ganze Erweiterung</u> der Teilalgebra ist (vgl. Matsumura [1], Theorem 5 in (5.E) oder Matsumura [2], Theorem 9.3).

2.1.5 Aufgabe 4

Zeigen sie die Gruppe T_n von 2.1.4 Beipiel 4 ist auflösbar.

Beweis.

1. <u>**Schritt**</u>: Der Kommutator zweier Elemente von $\mathbf{T}_n$ liegt in $\mathbf{U}_n$,

$$(x, y) = xyx^{-1}y^{-1} \in \mathbf{U}_n \text{ für beliebige } x, y \in \mathbf{T}_n.$$

Jedes Element $x \in \mathbf{T}_n$ hat die Gestalt

$$x = d\bullet(1+m)$$

mit einer umkehrbaren Diagonalmatrix d und einer nilpotenten oberen Dreieckmatrix m. Sei

$$y = e\bullet(1+n)$$

eine weiteres Element von T_n (mit einer umkehrbaren Diagonalmatrix e und einer nilpotenten oberen Dreieckmatrix n). Es gilt

$$\begin{aligned} xy &= d\bullet(1+m)\bullet e\bullet(1+n) \\ &= d\bullet(1+m)\bullet d^{-1}\bullet de\bullet(1+n)\bullet(de)^{-1}\bullet(de) \\ &= (1+\sigma_d(m))\bullet(1+\sigma_{de}(n))\bullet(de) \end{aligned}$$

Dabei bezeichne σ_z die Konjugation mit z, $\sigma_z(w) = zwz^{-1}$. Dieselbe Formel mit x und y vertauscht liefert

$$yx = (1+\sigma_e(n))\bullet(1+\sigma_{ed}(m))\bullet(ed).$$

Damit erhalten wir für den Kommutator

$$\begin{aligned} xyx^{-1}y^{-1} &= (xy)\bullet(yx)^{-1} \\ &= (1+\sigma_d(m))\bullet(1+\sigma_{de}(n))\bullet(de)\bullet(ed)^{-1}\bullet (1+\sigma_{ed}(m))^{-1}(1+\sigma_e(n))^{-1} \end{aligned}$$

Weil die Diagonal-Matrizen d und e miteinander kommutieren, folgt

$$(x,y) = (1+\sigma_d(m))\bullet(1+\sigma_{de}(n))\bullet (1+\sigma_{ed}(m))^{-1}(1+\sigma_e(n))^{-1}$$

Wenn wir eine nilpotente obere Dreiecksmatrix mit einer Diagonalmatrix konjugieren, erhalten wieder eine nilpotente obere Dreiecksmatrix. Auf der rechten Seite steht also ein Produkt von Elementen der Gruppe $\mathbf{U}_n$ und von Inversen solcher Elemente. Ein solches Produkt liegt wieder in $\mathbf{U}_n$. Wir haben gezeigt

$$(x,y) \in \mathbf{U}_n \text{ für beliebige } x, y \in \mathbf{T}_n.$$

2. **Schritt**. $\mathbf{U}_n$ ist ein Normalteiler von $\mathbf{T}_n$.

Im ersten Schritt haben wir gezeigt,

$$xyx^{-1}y^{-1} \in \mathbf{U}_n \text{ für beliebige } x,y \in \mathbf{T}_n.$$

Ist y sogar ein Element von U_n, so gilt

$$xyx^{-1} = xyx^{-1}y^{-1}y \in \mathbf{U}_n \bullet \mathbf{U}_n \subseteq \mathbf{U}_n ,$$

d.h. es ist

$$xyx^{-1} \in \mathbf{U}_n \text{ für beliebige } x \in \mathbf{T}_n \text{ und beliebige } y \in \mathbf{U}_n,$$

also

$$x\, \mathbf{U}_n x^{-1} \subseteq \mathbf{U}_n \text{ für beliebige } x \in \mathbf{T}_n.$$

2. **Schritt**: Reduktion auf die Auflösbarkeit der Untergruppe $\mathbf{U}_n$.

Es reicht zu zeigen die von den Kommutatoren

$$(x, y) := xyx^{-1}y^{-1} , x,y \in G$$

einer Gruppe G erzeugte Untergruppe[3]

$$(G, G)$$

liegt in Fall $G = \mathbf{T}_n$ ganz in $\mathbf{U}_n$,

$$(\mathbf{T}_n , \mathbf{T}_n) \subseteq \mathbf{U}_n .$$

Denn dann ist

$$\mathbf{T}_n/\mathbf{U}_n$$

eine Faktorgruppe der abelschen Gruppe $\mathbf{T}_n/(\mathbf{T}_n , \mathbf{T}_n)$ also abelsch, und es reicht, die Auflösbarkeit von $\mathbf{U}_n$ zu beweisen. Die Inklusion

$$(\mathbf{T}_n , \mathbf{T}_n) \subseteq \mathbf{U}_n$$

haben wir aber bereits im ersten Schritt bewiesen.

3.**Schritt**. Konstruktion einer Folge von Untergruppen U_n^r von $\mathbf{U}_n$.

Bezeichne E_{ij} die n×n-Matrix, deren einziger von 0 verschiedener Eintrag sich in der Position (i,j) befindet und gleich 1 ist. Die Matrizen der Gestalt E_{ij} heißen <u>Elementarmatrizen</u>. Es gilt

$$E_{ij} \bullet E_{uv} = \begin{cases} E_{iv} & \text{für } j=u \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (1)$$

Wir schreiben

$$\ell(E_{ij}) = j-i \qquad (2)$$

Die Eins steht in E_{ij} auf der Hauptdiagonalen, falls $\ell(E_{ij}) = 0$ gilt. Sie steht eine Position über der Hauptdiagonalen, falls $\ell(E_{ij}) = 1$ gilt, sie steht r Positionen über der Hauptdiagonalen, falls $\ell(E_{ij}) = r$ gilt. Die Menge

[3] Es ist sogar ein Normalteiler: innere Automorphismen überführen Kommutatoren in Kommutatoren.

$$\sum_{\ell(E_{ij})=r} k\bullet E_{ij}$$

besteht aus den Matrizen, deren einzige von Null verschiedene Einträge genau r Positionen über der Hauptdiagonalen liegen. Aus der Produktformel (1) lesen wir ab,

$$\ell(E_{iu}\bullet E_{uj}) = \ell(E_{ij}) = j\text{-}i = (u\text{-}i) + (j\text{-}u) = \ell(E_{iu}) + \ell(E_{uj}),$$

d.h.

$$\ell(E_{iu}\bullet E_{uj}) = \ell(E_{iu}) + \ell(E_{uj}), \tag{3}$$

Die Gruppe $\mathbf{U}_n$ läßt sich mit Hilfe dieser Bezeichnungen in der folgenden Gestalt schreiben.

$$U_n = 1 + N_n \text{ mit } N_n := \sum_{\ell(E_{ij})\ge 1} k\bullet E_{ij}. \tag{4}$$

Wir setzen

$$N_n^r := \sum_{\ell(E_{ij})\ge r} k\bullet E_{ij}$$

Dann gilt

$$N_n^r \supseteq N_n^{r+1} \text{ und } N_n^n = 0 \tag{5}$$

und

$$\begin{aligned} N_n^r\bullet N_n^s &= \sum_{\ell(E_{ij})\ge r} k\bullet E_{ij}\bullet \sum_{\ell(E_{uv})\ge s} k\bullet E_{uv} \\ &= \sum_{\ell(E_{ij})\ge r}\ \sum_{\ell(E_{uv})\ge s} k\bullet E_{ij}\bullet E_{uv} \\ &\subseteq \sum_{\ell(E_{ij})\ge r+s} k\bullet E_{ij} \qquad \text{(wegen (1) und (3))} \end{aligned}$$

also

$$N_n^r\bullet N_n^s \subseteq N_n^{r+s} \tag{5}$$

Wir setzen

$$\mathbf{U}_n^r := 1+N_n^r \tag{6}$$

Das Inverse einer Matrix der Gestalt 1 + m mit $m\in N_n^r$ hat die Gestalt

$$1 - m + m^2 - m^3 + - \ldots,$$

liegt also in $1+N_n^r$, d.h. der Übergang zum Inversen definiert eine Abbildung

$$\mathbf{U}_n^r \longrightarrow \mathbf{U}_n^r,\ x \mapsto x^{-1}.$$

Man beachte $\pm m^i$ ist für große i gleich 0 und liegt für beliebige $i\ge 1$ im k-Vektorraum

$$N_n^{ir} \subseteq N_n^r.$$

Wegen (5) definiert die Matrizen-Multiplikation eine Abbildung

$$\mathbf{U}_n^r \times \mathbf{U}_n^r \longrightarrow \mathbf{U}_n^r,\ (1+m, 1+m') \mapsto 1+m+m'+mm',$$

(es gilt $mm' \in N_n^{2r} \subseteq N_n^r$). Wir haben gezeigt,

$\mathbf{U}_n^r$ ist für r = 1,2,..., n eine Untergruppe von $\mathbf{U}_n = \mathbf{U}_n^1$.

4. **Schritt**. Berechnung eines weiteren Kommutators.

Seien $x \in N_n^1$ und $y \in N_n^r$. Wir wollen den Kommutator der Elemente

$$1+x \in U_n \text{ und } 1+y \in U_n^r$$

bestimmen. Wir setzen

$$\begin{aligned} s = (1+x)^{-1} &= \sum_{i=0}^{\infty} (-x)^i \\ &= 1 + x \cdot w \end{aligned}$$

mit

$$w = \sum_{i=1}^{\infty} (-x)^i \in N_n^1$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} (1+x)\cdot(1+y)\cdot(1+x)^{-1} &= (1 + x + y + xy)\cdot(1+x)^{-1} \\ &= (1+x)\cdot(1+x)^{-1} + (y + x\cdot y)\cdot s \\ &= 1 + (y + x\cdot y)\cdot s \\ &= 1 + (y + x\cdot y)\cdot(1+xw) \\ &= 1 + y + xy + yxw + xyxw \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} xy &\in N_n^1\cdot N_n^r \subseteq N_n^{r+1} \\ yxw &\in N_n^r\cdot N_n^1\cdot N_n^1 \subseteq N_n^{r+2} \\ xyxw &\in N_n^1 N_n^r N_n^1 N_n^1 \subseteq N_n^{r+3} \end{aligned}$$

also $\quad z := xy + yxw + xyxw \in N_n^{r+1}$

Für beliebige $x \in N_n^1$ und $y \in N_n^r$ ist also

$$(1+x)\cdot(1+y)\cdot(1+x)^{-1} = 1+y + z \text{ mit } z \in N_n^{r+1} \tag{7}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} (1+x,\ 1+y) &= (1+y + z)\cdot(1+y)^{-1} \\ &= (1+y)\cdot (1+y)^{-1} + z\cdot (1+y)^{-1} \\ &= 1 + z\cdot \sum_{i=0}^{\infty} (-y)^i \end{aligned}$$

mit

$$z\cdot (-y)^i \in N_n^{r+1}\cdot N_n^{i\cdot r} \subseteq N_n^{r+1}$$

für jedes i, wobei nur endlich viele $z\cdot (-y)^i$ von 0 verschieden sind. Damit hat der Kommutator für beliebige $x \in N_n^1$ und $y \in N_n^r$ die Gestalt

$$(1+x,\ 1+y) = 1 + u \text{ mit } u \in N_n^{r+1} \tag{8}$$

5. **Schritt**: $\mathbf{U}_n^r$ **ist Normalteiler von** $\mathbf{U}_n$

Nach (7) gilt

$$g \cdot U_n^r \cdot g^{-1} \subseteq U_n^r \text{ für beliebige } g \in \mathbf{U}_n.$$

6. **Schritt**: $(\mathbf{U}_n^r, \mathbf{U}_n^r) \subseteq \mathbf{U}_n^{r+1}$

Nach (8) gilt

$$(g, h) \in \mathbf{U}_n^{r+1} \text{ für beliebige } g, h \in \mathbf{U}_n^r.$$

Also liegt die von den Kommutatoren der Elemente von $\mathbf{U}_n^r$ erzeugte Untergruppe ganz in $\mathbf{U}_n^{r+1}$,

$$(\mathbf{U}_n^r, \mathbf{U}_n^r) \subseteq \mathbf{U}_n^{r+1}.$$

Der Kommutator der Restklassen von g und h in $\mathbf{U}_n^r/\mathbf{U}_n^{r+1}$ ist deshalb gleich 1, d.h. die Restklassen von je zwei Elementen g und h in $\mathbf{U}_n^r/\mathbf{U}_n^{r+1}$ kommutieren.

7. **Schritt**: Abschluß des Beweises.

Nach dem fünften Schritt ist

$$\mathbf{U}_n = \mathbf{U}_n^1 \supset \mathbf{U}_n^2 \supset \dots \supset \mathbf{U}_n^{n-1} \supset \mathbf{U}_n^n = \{1\}$$

eine Folge von Normalteilern von $\mathbf{U}_n$. Insbesondere ist $\mathbf{U}_n^{r+1}$ ein Normalteiler von $\mathbf{U}_n^r$ für jedes r. Nach dem sechsten Schritt ist

$$\mathbf{U}_n^r / \mathbf{U}_n^{r+1}$$

für jedes r eine Faktorgruppe der abelschen Gruppe $\mathbf{U}_n^r/(\mathbf{U}_n^r, \mathbf{U}_n^r)$, also selbst abelsch. Wir haben gezeigt $\mathbf{U}_n$ - und damit auch $\mathbf{T}_n$ - ist auflösbar.

QED.

Bemerkung

Die im vierten Schritt bewiesene Identität (8) ist eine viel stärkere Aussage als die Inklusion

$$(\mathbf{U}_n^r, \mathbf{U}_n^r) \subseteq \mathbf{U}_n^{r+1},$$

für deren Beweis wir sie benutzt haben. Nach (8) gilt

$$(\mathbf{U}_n, \mathbf{U}_n^r) \subseteq \mathbf{U}_n^{r+1}.$$

Das bedeutet, alle (n-1)-fach iterierten Kommunikatoren von Elementen $x_1,\dots,x_n \in U_n$ liegen in $U_n^n = \{1\}$:

$$(x_1,(\dots(x_{n-1},x_n)\dots)) = 1.$$

2.1.5 Aufgabe 5

Zeigen Sie, die Automorphismen der algebraischen Gruppe $\mathbf{G}_a$ (=k) sind gerade die Multiplikationen mit von 0 verschiedenen Elementen von k.

Beweis. Sei

$$\varphi\colon \mathbf{G}_a \longrightarrow \mathbf{G}_a$$

ein Automorphismus. Dann ist φ insbesondere ein Isomorphismus von affinen Varietäten, induziert also einen Isomorphismus der Koordinatenringe,

$$h := \varphi^*\colon k[T] = k[\mathbf{G}_a] \longrightarrow k[\mathbf{G}_a] = k[T], \text{ T eine Unbestimmte.}$$

Sei

$$f := h(T) = \varphi^*(T) \in k[T].$$

Dann ist

$$\mathrm{Im}(h) = k[f(T)] = \{p(f(T)) \mid p \in k[T]\}.$$

Wegen $\deg(p(f(T)) = \deg(p)\bullet\deg(f)$ und $T \in k[f(T)]$ folgt

$$\deg(f) = 1.$$

Als Verpflanzung der Koordinatenfunktion T entlang φ ist $f = \varphi^*(T)$ die Koordinatenfunktion der Abbildung φ, d.h. φ ist die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbf{G}_a \longrightarrow \mathbf{G}_a,\ x \mapsto f(x).$$

Als Homomorphismus überführt φ das neutrale Element von $\mathbf{G}_a$ in sich. Deshalb gilt

$$f(0) = 0.$$

Damit ist f ein Polynom vom Grad 1 mit trivialen Absolutglied,

$$f = a\bullet T \in k[T],\ a \in k.$$

Weil die Abbildung φ injektiv ist, muß $a \neq 0$ sein,

$$f = a\bullet T \text{ mit } a \in k^*.$$

Die Abbildung φ ist gerade die Multiplikation mit dem Element $a \in k^*$.
Die Abbildungen dieser Art sind tatsächlich Gruppen-Homomorphismen, denn für solche φ ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} k[T] & \xrightarrow{\varphi^*} & k[T] \\ \Delta\downarrow & & \downarrow\Delta \\ k[T]\otimes_k k[T] & \xrightarrow{\varphi^*\otimes\varphi^*} & k[T]\otimes_k k[T] \end{array} \quad \text{mit } \Delta(T) = T\otimes 1+1\otimes T,\ \varphi^*(T) = a\bullet T \text{ mit } a\in k^*.$$

kommutativ:

$$\Delta(\varphi(T)) = \Delta(a\bullet T) = a\bullet\Delta(T) = a(T\otimes 1+1\otimes T).$$

$$(\varphi\otimes\varphi)(\Delta(T)) = \varphi\otimes\varphi(T\otimes 1+1\otimes T) = (a\bullet T)\otimes 1+1\otimes(a\bullet T).$$

Wegen $a \neq 0$ ist φ sogar ein Automorphismus: wenn wir a durch 1/a ersetzen, erhalten wir die Umkehrung.

QED.

2.1.6 Verallgemeinerungen

(a) Gruppen-Schemata

Die Beschreibung des Begriffs der linearen algebraischen Gruppe mit Hilfe von Algebra-Homomorphismen wie in 2.1.2 führt zu folgenden Verallgemeinerung.

Sei R ein kommutativer Ring und A eine R-Algebra. Weiter seien R-Algebra-Homomorphismen

$$\Delta: A \longrightarrow A \otimes_R A\ ,\ \iota: A \longrightarrow A,\ \varepsilon: A \longrightarrow R,$$

gegeben, so daß die Diagramme von 2.1.2 kommutativ sind. Dann sagt man, die Daten

$$G = (A, \Delta, \iota, \varepsilon)$$

definieren ein Gruppen-Schema über R (genauer ein affines Gruppen-Schema). Wir werden gelegentlich auf diesen Begriff treffen. Wir werden jedoch nicht näher auf die Theorie der Gruppen-Schemata eingehen. Sie wird zum Beispiel in

Demazur, M., Gabriel, P. [1] und
Demazur, M., Grothendieck, A. [1]

behandelt.

(b) Gruppen-Schemata als Gruppen-Funktoren

Sei

$$G = (A, \Delta, \iota, \varepsilon)$$

ein Gruppenschema über dem Ring R. Aus den Axiomen von 2.1.2 folgt, daß für jede R-Algebra S die Menge

$$G(S) := \mathrm{Hom}_{R\text{-}Alg}(A, S)$$

der R-Algebra-Homomorphismen $A \longrightarrow S$ in natürlicher Weise eine Gruppen-Struktur besitzt. Genauer, durch

$$G: (\text{R-Algebren}) \longrightarrow (\text{Gruppen}),\ S \mapsto G(R),$$

ist ein Funktor auf der Kategorie der R-Algebren mit Werten in der Kategorie der Gruppen definiert. Ein solcher Funktor heißt auch Gruppen-Funktor (auf der Kategorie der R-Algebren. Der Begriff des Gruppen-Funktors verallgemeinert den Begriff des Gruppen-Schemas. Mehr über Gruppen-Funktoren findet man in der oben angegebenen Literatur.

(c) Quantengruppen

Eine neuere Variante der Verallgemeinerung, die recht wichtig geworden ist, ergibt sich, indem man in (a) nicht-kommutative R-Algebren A zuläßt. In diesem Fall sind die Komultiplikation und Auswertung im neutralen Element,

$$\Delta \text{ und } e,$$

k-Algebra-Homomorphismen wie bisher. Von

$$\iota$$

jedoch wird gefordert, daß es sich um einen Anti-Isomorphismus handelt. Es wird die Gültigkeit derselben Axiome wie bisher gefordert. Außerdem verlangen wir, daß die entgegengesetzte Algebra A^{opp} (d.h. A mit der Multiplikation in umgekehrter Reihenfolge) dieselben Eigenschaften bezüglich

$$\Delta, i^{-1}, e$$

hat. Wir sagen dann, die Daten

$$G = (A, \Delta, \iota, \varepsilon)$$

definieren eine Quantengruppe über R. Mehr über Quantengruppen und Beispiele findet man in

Jantzen [2] und
Kassel [1]

2.2 Einige grundlegende Ergebnisse

2.2.0 Eine einfache Beobachtung

Sei G eine algebraische Gruppe. Für jedes $g \in G$ definieren dann die Multiplikation von links und rechts Isomorphismen von affinen Varietäten

$$L_g: G \longrightarrow G,\ x \mapsto g\bullet x, \text{ und } R_g: G \longrightarrow G,\ x \mapsto x\bullet g^{-1}.$$

Wir werden diese Tatsache sehr oft ohne weitere Hinweise im folgenden benutzen. Wir nennen diese Isomorphismen Linkstranslation bzw. Rechtstranslation mit g.

Bemerkungen

(i) Die Linkstranslation mit g,

$$L_g: G \xrightarrow{(g,id)} G\times G \xrightarrow{\mu} G,$$

kann man als Einschränkung der Gruppen-Multiplikation μ auf die abgeschlossene Teilmenge

$$G \cong \{g\} \times G$$

von $G\times G$ auffassen.

(ii) Die Rechtstranslation mit g,

$$R_g: G \xrightarrow{(id,g^{-1})} G\times G \xrightarrow{\mu} G,$$

kann man als Einschränkung der Gruppen-Multiplikation μ auf die abgeschlossenen Teilmenge

$$G \cong G\times\{g^{-1}\}$$

von $G\times G$ auffassen.

2.2.1 Die Komponente der Eins

2.2.1.1 Charakterisierung der Komponente der Eins

Sei G eine algebraische Gruppe. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) Es gibt genau eine irreduzible Komponente G^0 von G, welche das neutrale Element $e \in G$ enthält. Diese ist ein abgeschlossener Normalteiler von G mit endlichem Index in G.

(ii) G^0 ist die einzige Zusammenhangskomponente von G, welche das neutrale Elemente e enthält.

(iii) Jede abgeschlossene Untergruppe von G mit endlichem Index enthält G^0.

Bemerkung

Der nachfolgende Beweis zeigt, jede algebraische Gruppe G ist die disjunkte Vereinigung ihrer irreduziblen Komponenten, die gleichzeitig ihre Zusammenhangskomponenten sind. Für algebraische Gruppen fallen also die Begriffe "Zusammenhangskomponente" und "irrduzible Komponente" zusammen. Eine algebraische Gruppe ist genau dann zusammenhängend, wenn sie irreduzibel ist.

Beweis. Zu (i). Seien

$$X \subseteq G \text{ und } Y \subseteq G$$

irreduzible Kompoenten von G, welche die Eins $e \in G$ enthalten. Sind

$$\mu: G\times G \longrightarrow G \text{ und } i: G \longrightarrow G$$

die Multiiplikation von G bzw. die Invertierungsabbildung (wie in 2.1.1), so ist

$$X\bullet Y := \mu(X\times Y)$$

eine irreduzible Teilmenge von G, und dasselbe gilt für deren Abschließung

$$\overline{X \bullet Y}$$

(nach 1.2.3). Wegen

$$X \subseteq \overline{X \bullet Y} \text{ und } Y \subseteq \overline{X \bullet Y}$$

und weil X und Y als Komponenten von G maximale irreduzible Teilmengen von G sind (vgl. 1.2.4), folgt

$$X = \overline{X \bullet Y} \text{ und } Y = \overline{X \bullet Y},$$

und damit insbesondere auch

$$X = Y.$$

Damit sind Existenz und Eindeutigkeit von G^0 bewiesen.

G^0 ist eine abgeschlossene Untergruppe von G.

Als irreduzible Komponente von G ist $X = G^0$ abgeschlossen in G.

Wegen $X = \overline{X \bullet X}$ ist X abgeschlossen gegenüber Multiplikation: mit g', g''$\in$X gilt $g' \bullet g'' \in X \bullet X \subseteq \overline{X \bullet X} = X$, d.h. μ induziert eine Abbildung

$$\mu|_X : X \times X \longrightarrow X.$$

Weil i: $G \longrightarrow G$ ein Isomorphismus ist, welcher das Element e in sich abbildet, ist $X^{-1} = i(X)$ eine irreduzible Komponente von G, welche e enthält, d.h. es ist $i(X) = X$ und i induziert einen Isomorphismus

$$i|_X : X \xrightarrow{\cong} X$$

von affinen algebraischen Varietäten. Damit ist X eine abgeschlossene Untergruppe von G.

G^0 ist Normalteiler mit endlichem Index.

Für jedes $x \in G$ ist

$$\sigma_x := R_{x^{-1}} \circ L_x : G \longrightarrow G,\ y \mapsto xyx^{-1},$$

ein Isomorphismus. Deshalb ist

$$\sigma_x(G^0)$$

eine irreduzible Komponente, welche e enthält, d.h. es ist

$$x \bullet G^0 \bullet x^{-1} = \sigma_x(G^0) = G^0$$

für jedes $x \in G$, d.h. G^0 ist ein Normalteiler.

Die Nebenklassen

$$x \bullet G^0$$

von G^0 in G sind wie G^0 selbst maximale irreduzible (und abgeschlossene - vgl. 1.2.4) Teilmengen von G, und damit Komponenten von G. Weil G als Varietät ein noetherscher Raum ist, gibt es nur endlich viele dieser Nebenklassen, d.h. der Index von G^0 in G ist endlich.

Zu (ii) und zur Bemerkung. Weil je zwei Nebenklassen von G^0 identisch oder disjunkt sind und diese als irreduzible Mengen auch zusammenhängend sind, folgt die Aussage der Bemerkung. Insbesondere gilt die Aussage von (ii).

Zu (iii). Sei H eine abgeschlossene Untergruppe von G mit endlichem Index in G. Dann ist

$$H^0 \subseteq H \subseteq G$$

eine Untergruppe von G, welche die Eins $e \in G$ enthält. Als abgeschlossene Untergruppe der abgeschlossenen Untergruppe H von G ist H^0 abgeschlossen in G.

Nach (i) hat H^0 einen endlichen Index in H und nach Voraussetzung ist der Index von H in G endlich. Deshalb ist auch der Index von H^0 in G endlich, und damit auch der von H^0 in G^0,

$$(G^0:H^0) \le (G:H^0) < \infty,$$

d.h. G^0 ist Vereinigung der endlich vielen paarweise disjunkten Nebenklassen $x\bullet H^0$ mit $x \in G^0$. Mit H^0 sind diese abgeschlossen. Dann ist aber H^0 als Komplement der von H^0 verschiedenen endlich vielen Nebenklassen $x\bullet H^0$ in G^0 auch offen,

$$H^0 \text{ ist abgeschlossen und offen in } G^0.$$

Weil G^0 zusammenhängend ist, folgt $H^0 = G^0$, also

$$G^0 = H^0 \subseteq H.$$

QED.

2.2.1.2 Definition und Vereinbarung

Die irreduzible Komponente einer algebraischen Gruppe G, welche das neutrale Element enthält wird mit

$$G^0$$

bezeichnet und heißt Komponente der Eins von G.

Bemerkungen

(i) Auf Grund von 2.2.1.1 sind für algebraische Gruppe die Begriffe der Irreduzibilität und des Zusammmenhangs dieselben. Im folgenden werden wir meistens - wie das üblich ist - von zusammenhängenden algebraischen Gruppen sprechen, nicht von irreduziblen.

(ii) Weil die irreduziblen Komponenten einer algebraischen Gruppe G gerade die Nebenklassen von G^0 sind (und damit zu G^0 isomorphe algebraische Varietäten), haben sie alle dieselbe Dimension

$$\dim G = \dim G^0$$

(vgl. 1.8.1).

2.2.2 Aufgaben

Aufgabe 1

Zeigen Sie, die Gruppen $\mathbf{G}_a$, $\mathbf{G}_m$, $\mathbf{GL}_n$, $\mathbf{D}_n$, $\mathbf{T}_n$, $\mathbf{U}_n$, $\mathbf{SL}_n$ von 2.1.4 sind zusammenhängend.

Beweis.

Irreduzibilität von $\mathbf{G}_a$:

Weil $k[\mathbf{G}_a] = k[T]$ als Polynomring über k nullteilerfrei ist, ist $\mathbf{G}_a$ irreduzibel, also zusammenhängend.

Irreduzibilität von $\mathbf{G}_m$:

Weil $k[\mathbf{G}_m] = k[T]_T$ als Quotientenring eines Polynomrings über k nullteilerfrei ist, ist $\mathbf{G}_m$ irreduzibel, also zusammenhängend.

Irreduzibilität von $\mathbf{GL}_n$:

Weil $k[\mathbf{GL}_n] = k[T_{ij}, \det(T_{ij})^{-1} \mid i,j=1,...,n]$ als Quotientenring eines Polynomrings über k nullteilerfrei ist, ist $\mathbf{GL}_n$ irreduzibel, also zusammenhängend.

Irreduzibilität von $\mathbf{D}_n$:

Weil

$$k[\mathbf{D}_n] = k[T_1,...,T_n, (T_1\bullet...\bullet T_n)^{-1}]$$

als Quotientenring eines Polynomrings über k nullteilerfrei ist, ist $\mathbf{D}_n$ irreduzibel, also zusammenhängend

Irreduzibilität von $\mathbf{T}_n$:

Weil

$$k[\mathbf{T}_n] = k[T_{ij}, (T_{11}\bullet...\bullet T_{nn})^{-1} \mid 1 \le i \le j \le n, i,j \text{ ganz}]$$

als Quotientenring eines Polynomrings über k nullteilerfrei ist, ist $\mathbf{T}_n$ irreduzibel, also zusammenhängend.

Irreduzibilität von $\mathbf{U}_n$:

Weil

$$k[\mathbf{U}_n] = k[T_{ij} \mid 1 \le i < j \le n, i,j \text{ ganz}]$$

als Polynomring über k nullteilerfrei ist, ist $\mathbf{U}_n$ irreduzibel, also zusammenhängend.

Irreduzibilität von $\mathbf{SL}_n$:

Wir geben zwei Beweise an, einen mehr algebraischen und einen mehr geometrrischen. Der algebraische ist weniger aufwendig, der geometrische besitzt weitreichende Verallgemeinerungen (und ist deshalb wichtiger auch als Illustration späterer Sätze, vgl. 2.2.7 und 2.2.9 Aufgabe 1).

Der algebraische Beweis für die Irreduzibilität der $\mathbf{SL}_n$.

Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{SL}_n &= \{ x \in \mathbf{GL}_n \mid \det(x) - 1 = 0 \} \qquad \text{(vgl. . 2.1.4 Beispiel 4 (e))}\\ &= \{ x \in \mathbf{M}_n \mid \det(x) - 1 = 0 \},\end{aligned}$$

d.h. als Teilmenge der afffinen Varietät $\mathbf{M}_n \cong \mathbb{A}^{n^2}$ ist $\mathbf{SL}_n$ gerade die abgeschlossenene Teilmenge

$$\mathbf{SL}_n = V(\det(T_{ij}) - 1) \subseteq \mathbb{A}^{n^2}$$

hat also den Koordinatenring

$$\begin{aligned}k[\mathbf{SL}_n] &= R/I(V(\det(T_{ij}) - 1)) \text{ mit } R := k[T_{ij} \mid i,j = 1,..., n]\\ &= R/\sqrt{(\det(T_{ij})-1)\bullet R}\end{aligned}$$

(vgl. 1.1.2 (ii)). Es reicht zu zeigen,

$$\det(T_{ij}) - 1 \text{ ist irreduzibel in } R,$$

Zwei Beweise findet man am Anfang des Beweises zu 2.1.5 Aufgabe 3.

Der geometrische Beweis für die Irreduzibilität der $\mathbf{SL}_n$ (mit Hilfe von 2.2.6).

Nach Proposition 2.2.6 reicht es zu zeigen, die Bilder der Abbildungen

$$\mu\circ(\mathrm{id}\times\mu): \mathbf{U}_n\times\mathbf{D}_n\times\mathbf{U}_n \longrightarrow \mathbf{SL}_n,\ (x,y,z)\mapsto x\bullet y\bullet z,$$

$$\mu\circ(\mathrm{id}\times\mu)\circ(\tau\times\mathrm{id}): \mathbf{U}_n\times\mathbf{D}_n\times\mathbf{U}_n \longrightarrow \mathbf{SL}_n,\ (x,y,z)\mapsto x^T\bullet y\bullet z, \qquad (1)$$

$$\mu\circ(\mathrm{id}\times\mu)\circ(\mathrm{id}\times\tau): \mathbf{U}_n\times\mathbf{D}_n\times\mathbf{U}_n \longrightarrow \mathbf{SL}_n,\ (x,y,z)\mapsto x^T\bullet y\bullet z^T,$$

wobei τ den Übergang zur transponierten Matrix bezeichne, erzeugen die Gruppe $\mathbf{SL}_n$. Denn diese Abbildungen sind als Zusammensetzungen von Morphismen affiner Varietäten Morphismen und die Faktoren $\mathbf{U}_n$ und $\mathbf{D}_n$ des Produkts links sind irreduzibel, so daß auch die Produkt-Varietät links irreduzibel ist. Aus der Surjektivität der Abbildungen folgt deshalb, daß $\mathbf{SL}_n$ als Erzeugnis von Bildern (welche e enthalten) von irreduziblen Varietäten zusammenhängend ist (nach 2.2.6). Beweisen wir also, die Bilder der Abbildungen (1) erzeugen $\mathbf{SL}_n$:

Sei $A\in\mathbf{SL}_n$. Wir haben zu zeigen, es gibt Matrizen

$$U',\ U''\in\mathbf{U}_n\bigcup\mathbf{U}_n^T \text{ und } D\in\mathbf{D}_n \text{ mit } U'\bullet D\bullet U'' = A.$$

Da alle hier auftretenden Matrizen umkehrbar sind, können wir uns die Bedingung an A nach D aufgelöst denken, d.h. es reicht es zu zeigen, daß es Matrizen

$$U',\ U''\in\mathbf{U}_n\bigcup\mathbf{U}_n^T$$

und $D\in\mathbf{D}_n$ gibt mit

$$D = U'\bullet A\bullet U''.$$

Mit anderen Worten, wir haben zu zeigen, A läßt sich durch Multiplikation von links und rechts mit Matrizen aus $\mathbf{U}_n\bigcup\mathbf{U}_n^T$ in eine Diagonal-Matrix überführen.

Zum Beweis führen wir folgende Bezeichnungen ein.

E_{ij} sei die n×n-Matrix, deren einziger von 0 verschiedener Eintrag gleich 1 ist und sich in der Position (i,j) befindet.

$U_{ij}(\lambda) := \mathrm{Id} + \lambda\bullet E_{ij}$ (mit $\lambda\in k$).

Man beachte die Matrizen $U_{ij}(\lambda)$ liegen in $\mathbf{U}_n\bigcup\mathbf{U}_n^T$. Wir schreiben A in der Gestalt

$$A = (a_1,\ldots,a_n),$$

d.h. a_i soll die i-te Spalte von A sein. Dann gilt

$$\begin{aligned} A\bullet U_{ij}(\lambda) &= A + \lambda\bullet(A\bullet E_{ij}) \\ &= (a_1,\ldots,a_n) + \lambda\bullet(0,\ldots,0,a_i,0,\ldots,0) \end{aligned}$$

wobei sich a_i in der j-ten Spalte der Matrix des zweiten Summanden befindet. Es folgt

$$A\bullet U_{ij}(\lambda) = (a_1,\ldots,a_j+\lambda\bullet a_i,\ldots,a_n).$$

Die Multiplikation von rechts mit $U_{ij}(\lambda)$ führt dazu, daß zur j-ten Spalte von A das λ-fache der i-ten addiert wird. Analog sieht man, die Multiplikation von links mit $U_{ij}(\lambda)$, daß zur i-ten Zeile von A das λ-fache der j-ten addiert wird.
Es reicht zu zeigen,

> A läßt sich durch wiederholtes Multiplizieren von links und rechts mit Matrizen der Gestalt $U_{ij}(\lambda)$ in eine Diagonalmatrix überführen.

1. <u>Schritt</u>. A läßt sich so abändern daß in der Position (1,1) ein von 0 verschiedener Eintrag steht.

Weil A umkehrbar ist, gibt es in der ersten Zeile einen von 0 verschiedenen Eintrag, sagen wir in der j-ten Spalte.

$$A = (a_1,...,a_j,...), \text{ erste Koordinate von } a_j \text{ ist ungleich } 0.$$

Wir addieren die j-te Spalte zur ersten und erhalten

$$(a_1 + a_j,...,a_j,...),$$

wobei alle durch Pünktchen angedeuteten Spalten unverändert bleiben. Wir subtrahieren die erste Spalte von der j-ten und erhalten

$$(a_1 + a_j,...,-a_1,...).$$

Wir addieren die j-te Spalte zu ersten und erhalten

$$(a_j,...,-a_1,...).$$

In der neuen Matrix steht in der Position (1,1) ein von 0 verschiedener Beitrag. Die beschriebenen Veränderungen von A lassen sich durch die Multiplikation von rechts mit Matrizen der Gestalt $U_{ij}(\lambda)$ realisieren.

2. <u>Schritt</u>. A läßt sich so abändern, daß der Eintrag in der Position (1,1) der einzige von 0 verschiedene ist in der ersten Zeile und der ersen Spalte.

Auf Grund es ersten Schrittes können wir annehmen, der Eintrag in der Position (1,1) ist von 0 verschieden. Indem wir Vielfache der ersten Zeile von den anderen Zeilen abziehen, erreichen wir, daß der Eintrag in der Position (1,1) der einzige von 0 verschiedene in der ersten Spalte ist. Die Anagogen Operationen mit Spalten können dafür sorgen, daß dies auch für die erste Zeile gilt.
Alle Veränderungen lassen sich erreichen, durch Multiplikation mit Matrizen der Gestalt

$$U_{ij}(\lambda).$$

3. <u>Schritt</u>. Abschluß des Beweises.

Wir führen die oben beschriebenen Operationen in analoger Weise für die Position (2,2), (3,3), ... anstelle von (1,1) durch und erhalten nach endlich vielen Schritten eine Diagonalmatrix.
QED.

Aufgabe 2

Sei die Charakteristik von k ungleich 2. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Die Gruppe $\mathbf{O}_n$ ist nicht zusammenhängend.

(b) Sei V die Menge der schiefsymmetrischen n×n-Matrizen mit Einträgen aus k. Dann definiert die Abbildung

$$x \mapsto (1+x)^{-1}\cdot(1-x)$$

einen Isomorphismus einer nicht-leeren offenen Teilmenge von $\mathbf{SO}_n$ mit einer offenen Teilmenge von V. Verwenden Sie diesen zur Berechnung der Dimensionen von $\mathbf{O}_n$ und $\mathbf{SO}_n$.

(c) Die abgeschlossene Untergruppe $\mathbf{SO}_n$ ist die Komponente der Eins von $\mathbf{O}_n$.

Beweis von (a)
Die Determinante ist eine reguläre Funktion auf $\mathbf{O}_n$, definiert also einen Morphismus affiner Varietäten

$$\det: \mathbf{O}_n \longrightarrow \mathbf{G}_m.$$

Für orthogonale Matrizen $A \in \mathbf{O}_n$ gilt $A^T \bullet A = \mathrm{Id}$, also

$$1 = \det(\mathrm{Id}) = \det(A^T)\bullet\det(A) = \det(A)^2$$

Das Bild der Abbildung liegt also in der Menge $\{\pm 1\} \in \mathbf{G}_m$. Beide Werte werden angenommen:

$\det A = 1$ falls A die Einheitsmatrix ist

$\det A = -1$ falls $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & \mathrm{Id} \end{pmatrix}$ mit $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist.

Dashalt gilt

$$\mathbf{O}_n = \det^{-1}(1) \cup \det^{-1}(-1)$$

wobei rechts echte Teilmengen von $\mathbf{O}_n$ stehen, die beide abgeschlossen in $\mathbf{O}_n$ sind. Damit gilt (a). Die Argumentation versagt in der Charakteristik 2, weil dann $+1 = -1$ gilt und die Menge $\{\pm 1\}$ nur aus einem Element besteht.

Beweis von (b)
1. Schritt. Die Menge

$$U := \{x \in \mathbf{SO}_n \mid \det(1+x) \neq 0\}$$

ist nicht leer.
Bezeichne 1_{n-2} die $(n-2)\times(n-2)$-Einheitsmatrix und sei

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1_{n-2} \end{pmatrix} \text{ mit } B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist A eine orthogonale Matrix mit der Determinante

$$\det(A) = \det(B) = 1,$$

d.h. $A \in \mathbf{SO}_n$. Weiter ist

$$\det(1+A) = \det\begin{pmatrix} 1+B & 0 \\ 0 & 2\bullet 1_{n-2} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\bullet 2^{n-2} = 2^{n-1} \neq 0,$$

weil die Charakteristik von 2 verschieden sein soll. Damit gilt $A \in U$, d.h. U ist nicht leer.
2. Schritt. Die Menge

$$W := \{y \in V \mid \det(1+y) \neq 0\}$$

ist nicht leer.
Sei

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist A eine schiefsymmetrische Matrix, $A \in V$, mit

$$\det(1+A) = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$$

weil die Charakteristik von 2 verschieden sein soll. Damit gilt $A \in W$, d.h. W ist nicht leer.

3. Schritt. Die Abbildung

$$\varphi: U \longrightarrow W,\ x \mapsto (1+x)^{-1}(1-x),$$

ist wohldefiniert

Seien $x \in U$ und

$$y = \varphi(x) = (1+x)^{-1}(1-x). \tag{1}$$

Dann gilt

$$(1+x)\cdot y = 1-x.$$

Wegen $x \in U \subseteq \mathbf{SO}_n \subseteq \mathbf{O}_n$ gilt $x^T\cdot x = 1$, also $x^T = x^{-1}$. Wir gehen zu den transponierten Matrizen über und erhalten

$$y^T(1+x^T) = 1 - x^T$$
$$y^T(1+x^{-1}) = 1 - x^{-1}.$$

Multiplikation von rechts mit x liefert

$$y^T(x+1) = x - 1$$
$$y^T \quad = - (1-x)(1+x)^{-1}$$

Die Faktoren $(1-x)$ und $(1+x)^{-1}$ kommutieren miteinander, denn es gilt

$$\begin{aligned}(1-x)(1+x)^{-1} - (1+x)^{-1}\cdot(1-x) &= (1+x)^{-1}((1+x)(1-x) - (1-x)(1+x)))\cdot(1+x)^{-1}\\ &= (1+x)^{-1}(1-x^2 - 1 + x^2)\cdot(1+x)^{-1}\\ &= 0\end{aligned}$$

Damit ist

$$y^T \quad = - (1+x)^{-1}\cdot(1-x) = -y$$

Wir haben gezeigt, $y = \varphi(x)$ ist schiefsymmetrisch.

Mit (1) gilt weiter

$$y + 1 = (1+x)^{-1}(1-x) + 1 = (1+x)^{-1}(1-x + 1+x) = 2\cdot(1+x)^{-1}$$

also

$$\det(1+y) = 2^n\cdot\det(1+x)^{-1}$$

Weil die Charakteristiki von 2 verschieden sein soll, ist die rechte Seite von 0 verschieden, d.h. es gilt

$$\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq W := \{y \in V \mid \det(1+y) \neq 1\}.$$

Die Abbildung φ ist tatsächlich korrekt definiert.

4. Schritt. Die Abbildung

$$\psi: W \longrightarrow U,\ y \mapsto (1-y)\cdot(1+y)^{-1}$$

ist wohldefiniert

Sei

$$x = \psi(y) = (1-y)\cdot(1+y)^{-1} \tag{2}$$

Dann gilt

$$x\cdot(1+y) = 1-y.$$

Weil y schiefsymmetrisch ist, erhalten wir durch Transponieren

$$(1-y)\cdot x^T = 1 + y$$

Weil die rechte Seie eine von 0 verschiedene Determinante besitzt, gilt auch

$$\det(x) \neq 0 \text{ und } \det(1-y) \neq 0.$$

Weiter ist

$$(1-y)\cdot x^T x\cdot(1+y) = (1+y)\cdot(1-y) = 1-y^2 = (1-y)\cdot(1+y),$$

also

$$x^T\cdot x \quad = 1,$$

d.h. x ist ein orthogonale Matrix. Es gilt also

$$\mathrm{Im}(\psi) \subseteq \mathbf{O}_n.$$

Nun ist W als offene Teilmenge des Vektorraums V irreduzibel, also zusammenhängend. Außerdem gilt $0 \in W$ und $\psi(0) = 1$.

Die Abbildung ψ ist ein Morphismus von offenen Teilmengen von affinen Varietäten und die Determinante ist auf $\mathbf{O}_n$ ein reguläre Funktion. Deshalb ist $\det\circ\psi$ regulär auf W. Die Determinante nimmt aber auf $\mathbf{O}_n$ nur die Werte +1 und -1 an. Deshalb gilt dasselbe auch für $\det\circ\psi$.Die Funktion $\det\circ\psi$ muß deshalb auf der irreduziblen Menge W konstant sein, d.h. es gilt

$$\det(\psi(y)) = 1 \text{ für jedes } y \in W,$$

also

$$\mathrm{Im}(\psi) \subseteq \mathbf{SO}_n$$

Wir haben noch zu zeigen,

$$\det(1+x) \neq 0,$$

denn dann liegt $\mathrm{Im}(\psi)$ in U.

Wegen (2) gilt

$$\begin{aligned} 1+ x \quad &= 1 + (1-y)\cdot(1+y)^{-1} \\ &= (1+y + 1 - y)\cdot(1+y)^{-1} \\ &= 2\cdot(1+y)^{-1} \end{aligned}$$

also

$$\det(1+x) = 2^n\cdot\det(1+y)^{-1}$$

Der Wert rechts ist ungleich Null, weil die Charakteristik ungleich 2 sein soll. Also gilt

$$\mathrm{Im}(\psi) \subseteq U,$$

und ψ ist korrekt definiert.

5. <u>Schritt</u>. Die Abbildungen φ und ψ sind invers zueinander.

Für $x \in U$ gilt

$$\begin{aligned} \psi(\varphi(x)) &= \psi((1+x)^{-1}(1-x)) && \text{(Definition von } \varphi\text{, vgl. (1))} \\ &= (1-(1+x)^{-1}(1-x))\cdot(1+(1+x)^{-1}(1-x))^{-1} && \text{(Definition von } \psi\text{, vgl. (2))} \\ &= (1+x)^{-1}(1+x - (1-x))\cdot((1+x)^{-1}\cdot(1+x + (1-x)))^{-1} \\ &= (1+x)^{-1}(2x)\cdot((1+x)^{-1}\cdot 2)^{-1} \\ &= (1+x)^{-1}\cdot(2x)\cdot 2^{-1}(1+x) \\ &= (1+x)^{-1}\cdot x\cdot (1+x) && \text{(Skalar-Matrizen liegen im Zentrum)} \\ &= (1+x)^{-1}\cdot(1+x)\cdot x && \text{(x und 1+x kommutieren)} \\ &= x \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\psi\circ\varphi = \mathrm{Id}.$$

Für $y \in W$ gilt

$$\varphi(\psi(y)) = \varphi((1-y)\cdot(1+y)^{-1}) \qquad \text{(Definition von } \psi\text{, vgl. (2))}$$

$= (1+(1-y)\cdot(1+y)^{-1})^{-1}(1-(1-y)\cdot(1+y)^{-1})$ (Definition von φ, vgl. (1))
$= ((1+y + (1-y))\cdot(1+y)^{-1})^{-1}\cdot(1+y-(1-y))\cdot(1+y)^{-1}$
$= (2\cdot(1+y)^{-1})^{-1}\cdot 2y\cdot(1+y)^{-1}$
$= (1+y)\cdot 2^{-1}\cdot 2y\cdot(1+y)^{-1}$
$= (1+y)\cdot y\cdot(1+y)^{-1}$
$= y\cdot(1+y)\cdot(1+y)^{-1}$ (1+y und y kommutieren)
$= y$

Damit gilt

$$\varphi\circ\psi = \mathrm{Id}.$$

Zusammen ergibt sich, daß φ und ψ zueinander inverse Isomorphismen der offenen Teilvarietäten U und W von $\mathbf{SO}_2$ bzw. V sind.

6. <u>Schritt</u>. $\dim \mathbf{O}_2 = \dim \mathbf{SO}_2 = \dim V = \frac{n\cdot(n-1)}{2}$.
Die Einträge einer schiefsymmetrischen Matrix A auf der Hauptdiagonalen sind 0. Die Matrix ist durch Ihre Einträge echt oberhalb der Hauptdiagonalen eindeutig bestimmt, und diese können beliebig sein. Deren Anzahl ist

$$(n-1)+(n-2)+\ldots+ 1 = \frac{n\cdot(n-1)}{2}.$$

Deshalb ist V als k-Vektorraum isomorph zu

$$V \cong k^{n\cdot(n-1)/2},$$

d.h.

$$\dim_k V = \frac{n\cdot(n-1)}{2}.$$

Die Dimension von V als k-Vektorraum ist aber dieselbe wie die als affine algebraische Varietät ($\cong \mathbb{A}^{n\cdot(n-1)/2}$), d.h. es ist

$$\dim V = \frac{n\cdot(n-1)}{2}.$$

Die Abbildung

$$\psi: W \longrightarrow U$$

identifiziert W mit einer offenen Teilmenge $\mathbf{SO}_n$. Weil V irreduzibel ist, gilt dasselbe für W und U. Insbesondere ist U zusammenhängend (und enthält das neutrale Element von von $\mathbf{SO}_n$). Deshalb liegt U ganz in der Komponente der Eins von $\mathbf{SO}_n$,

$$U \subseteq (\mathbf{SO}_n)^0.$$

Weil diese Komponente irreduzibel ist, liegt die offene Teilmenge U dicht in dieser Komponente,

$$\overline{U} = (\mathbf{SO}_n)^0.$$

Damit gilt

$\dim \mathbf{SO}_n = \dim (\mathbf{SO}_n)^0$ (Bemerkung 2.2.1.2 (ii))
$= \dim \overline{U}$
$= \dim U$ (nach 1.8.1.2, 1.8..1.3 weil $\overline{U}$ irreduzibel ist)
$= \dim W$
$= \dim V$ (nach 1.8.1.2, 1.8..1.3 weil V irreduzibel ist)
$= n\cdot(n-1)/2$ (siehe oben).

Nach Definition ist $\mathbf{SO}_n$ eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathbf{O}_n$,

$$\mathbf{SO}_n = \{x \in \mathbf{O}_n \mid \det(x) = 1\}.$$

Sie hat den endlichen Index 2 in $\mathbf{O}_n$,

$$\begin{aligned}\mathbf{O}_n &= \{x \in \mathbf{O}_n \mid \det(x) = 1\} \bigcup \{x \in \mathbf{O}_n \mid \det(x) = -1\}\\ &= \mathbf{SO}_n \bigcup A_0 \bullet \mathbf{SO}_n \qquad (A_0 \in \mathbf{O}_n \text{ beliebig mit } \det(A_0) = -1).\end{aligned}$$

Nach 2.2.1.1 (iii) gilt deshalb

$$(\mathbf{O}_n)^0 \subseteq \mathbf{SO}_n$$

Weil $(\mathbf{O}_n)^0$ zusammenhängend ist und das neutrale Element von $\mathbf{SO}_n$ enthält, gilt sogar

$$(\mathbf{O}_n)^0 \subseteq (\mathbf{SO}_n)^0$$

Umgekehrt ist

$$(\mathbf{SO}_n)^0 \subseteq \mathbf{SO}_n \subseteq \mathbf{O}_n$$

Außerdem ist $(\mathbf{SO}_n)^0$ zusammenhängend und enthält das neutrale Element von $\mathbf{O}_n$, d.h. es gilt

$$(\mathbf{SO}_n)^0 \subseteq (\mathbf{O}_n)^0.$$

Damit gilt

$$(\mathbf{SO}_n)^0 = (\mathbf{O}_n)^0,$$

also

$$\begin{aligned}\dim \mathbf{O}_n &= \dim (\mathbf{O}_n)^0 && \text{(Bemerkung 2.2.1.2 (ii))}\\ &= \dim (\mathbf{SO}_n)^0\\ &= \dim \mathbf{SO}_n && \text{(Bemerkung 2.2.1.2 (ii)).}\end{aligned}$$

Vorbemerkung zum Beweis von (c).

Es gibt mindestens zwei erwähnenwerte Beweise, die aber beide einige Kenntnisse aus der Theorie der quadratisichen Formen erfordern. Beide verwenden den Satz von Dieudonné über die Zerlegung orthogonaler Transformationen in Reflektionen.[4] Siehe

Lam [1], Kapitel I, §7 oder

Jacobson [4], Kapitel 6, Abschnitt 6.12, Satz von Cartan- Dieudonné, - Reflektionen werden hier “Symmetrien” genannt - , oder

Grundvorlesung Lineare Algebra II im Sommersemester 2013 in Leipzig, Abschnitt 6.3.13

1. Der erste, den man algebraischen Beweis nennen könnte, verwendet die im Beweis von (b) konstruierte Abbildung

$$\psi: W \longrightarrow U,\ y \mapsto (1-y)\bullet(1+y)^{-1}$$

mit $W := \{y \in V \mid \det(1+y) \neq 0\}$ und $U := \{x \in \mathbf{SO}_n \mid \det(1+x) \neq 0\}$.

---

[4] Der Satz gilt für beliebige Körper mit einer von 2 verschiedenen Charakteristik. Über den reellen Zahlen kann man einen sehr viel einfacherern und durchsichtigeren Beweis angeben: für eine gegebene orthogonale Transformation $A: V \longrightarrow V$ zeigt man unter Verwendung der Eigenwerte von A über den komplexen Zahlen, daß der Raum in eine direkte Summe von invarianten Unterräumen der Dimension ≤ 2 zerfällt. Auf den Räumen der Dimension 2 kann man die Einträge der Matrix von A durch einen Winkel ausdrücken und so zeigen, daß A dort die Zusammensetzung von zwei oder weniger Reflektionen ist.

2. Der zweite ist geometrischer Natur, nutzt die Irreduziblität der Sphären und illustriert wie der geometrische Beweis für die Irreduzibilität der SL_n in 2.2.2 Aufgabe 1 einen späteren Satz - vgl. 2.2.7 und 2.2.9 Aufgabe 1.

Beweis von (c) (algebraische Variante)

Algebraischer Beweis der Irreduzibilität von SO_n.

Wie schon erwähnt verwenden wir die im Beweis von (b) konstruierte Abbildung

$$\psi: W \longrightarrow U, y \mapsto (1-y)\cdot(1+y)^{-1}$$

mit

$$W := \{y \in V \mid \det(1+y) \neq 0\} \text{ und } U := \{x \in \mathbf{SO}_n \mid \det(1+x) \neq 0\}.$$

Die offene irreduzible Teilmenge U von $\mathbf{SO}_n$ enthält das Einselement von $\mathbf{SO}_n$ und ist somit eine nicht-leere offenen Teilmenge der Zusammenhangskomponente der Eins,

$$\emptyset \neq U \subseteq (\mathbf{SO}_n)^0 \text{ , U offen in } (\mathbf{SO}_n)^0.$$

Weil $(\mathbf{SO}_n)^0$ irreduzibel ist, liegt jede nicht-leere offene Teilmenge dicht in $(\mathbf{SO}_n)^0$. Die Abschließung von U ist somit gerade die Komponente der Eins von $\mathbf{SO}_n$,

$$\bar{U} = (\mathbf{SO}_n)^0 \ (\subseteq \mathbf{SO}_n),.$$

Die Zerlegung von $\mathbf{SO}_n$ in irreduzible Komponenten fällt zusammen mit der Zerlegung in Nebenklassen modulo $\bar{U}$, sagen wir

$$\mathbf{SO}_n = A_1\bar{U} \cup A_2\cdot\bar{U} \cup \ldots \cup A_r\cdot\bar{U}$$

mit

$$A_i \in \mathbf{SO}_n \text{ für } i = 1,\ldots, r$$

Dabei sind die

$$A_i\bar{U} \text{ paarweis disjunkt.}$$

Wir können annehmen,

$$A_1 = 1$$

und

$$A_2 , \ldots , A_r \in \mathbf{SO}_n - \bar{U} \subseteq \mathbf{SO}_n - U, \text{ d.h. } \det(1+A_i) = 0 \text{ für } i = 2,\ldots,r.$$

Wir haben zu zeigen, r = 1.

1. Schritt. Der Fall n = 1.

In diesem Fall ist die Situation einfach: SO_1 besteht aus 1×1-Matrizen mit der Determinante 1, d.h.

$$SO_1 = \{1\}$$

ist eine einpunktige Menge und damit abgeschlossen und irreduzibel.

2. Schritt. Der Fall n = 2.

Beschreiben wir die Elemente

$$A \in \mathbf{SO}_2 - U = \{ x \in \mathbf{SO}_2 \mid \det (1+x) = 0 \}.$$

Wegen

$$\det(1+A) = 0,$$

hat A den Eigenwert -1, d.h. es gibt einen Vektor $v \in k^2 - \{0\}$ mit

$$Av = -v.$$

Der von v erzeugte Unterraum wird bei der durch A definierten linearen Abbildung

$$A: k^2 \longrightarrow k^2$$

in sich abgebildet. Wir haben zwei Fälle zu unterscheiden.

1. Fall: $v^T v \neq 0$.

Das orthogonale Komplement von $k\cdot v$ ist ein zu $k\cdot v$ komplementärer 1-dimensionaler Unterraum und k^2 zerfällt in eine direkte Summe

$$k^2 = k\cdot v \oplus (k\cdot v)^\perp = k\cdot v \oplus k\cdot w \text{ mit } k\cdot w = (k\cdot v)^\perp$$

Wegen $A(k\cdot v) \subseteq k\cdot v$ gilt auch für das orthogonale Komplement $A(k\cdot w) \subseteq k\cdot w$, d.h.

$$A\cdot w = \lambda\cdot w.$$

Die Matrix von A bezüglich dieser Basis von k^2 hat die Gestalt

$$S\cdot A\cdot S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Deshalb ist $1 = \det(A) = \det\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = -\lambda$, d.h. $\lambda = -1$, also

$$A = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Fall: $v^T v = 0$.

Dann ist k^2 in Bezug auf das Standard-Skalarprodukt eine hyperbolische Ebene (vgl. Jacobson [4], Kapitel 6, Abschnitt 6.4, Definition vor Theorem 6.10). Die hyperbolische Ebene enthält nach dem dortigen Theorem 6.10 (3) genau zwei total isotrope Unterräume, der eine wird wegen $v^T v = 0$ von v erzeugt. Sei w ein erzeugendeer Vektor des anderen,

$$k^2 = k\cdot v + k\cdot w.$$

Die orthogonalen Transformationen des k^2 mit der Determinante 1 sind nach dem zitierten Theorem 6.10, Aussage (4) von der Gestalt

$$A\cdot v = c\cdot v\ ,\ A\cdot w = \frac{1}{c}\cdot w \text{ für ein } c \in k - \{0\}.$$

Wegen $A\cdot v = -v$ ist in unserem Fall $c = -1$ und wie im ersten Fall ist

$$A = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

In beiden Fällen sehen wir

$$\mathbf{SO}_2 - \bar{U} \subseteq \mathbf{SO}_2 - U = \{\, x \in \mathbf{SO}_2 \mid \det(1+x) = 0 \,\} = \{-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$$

Es gibt also höchstens eine von $\bar{U}$ verschiedene Nebenklasse von $\mathbf{SO}_2$ modulo der Untergruppe

$$\bar{U} = \mathbf{SO}_2^0$$

und diese hat höchstens ein Element. Weil aber alle irreduziblen Komponenten von $\mathbf{SO}_2$ dieselbe Dimension haben und

$$\dim \bar{U} = \dim \mathbf{SO}_2 = 2\cdot 1/2 = 1 > 0$$

ist, kann eine Nebenklasse von $\bar{U}$ nicht aus nur einem Punkt bestehen. Deshalb gilt

$$\bar{U} = \mathbf{SO}_2,$$

d.h. $\mathbf{SO}_2$ ist zusammenhängend.

3. Schritt. Der Fall n = 3.
Es reicht zu zeigen,

$$\mathbf{SO}_3 \subseteq \overline{U}\ (= \mathbf{SO}_3^0)$$

Nach dem Satz von Dieudonné ist jede Matrix

$$A \in \mathbf{SO}_3$$

die Zusammensetzung von zwei Spiegelungen (vgl. Lam [1], Kapitel 1, §7, Folgerung 7.3),

$$A = s_u \circ s_v$$

mit

$$s_u(x) = x - 2\cdot \frac{<x,u>}{<u,u>} \cdot u$$

mit einem anisotropen Vektor $u \in k^3$ (d.h. $<u, u> \neq 0$). Wir können annehmen, die beiden (anisotropen) Vektoren

u und v sind linear unabhängig.

Denn es gilt $s_u = s_v$ falls u und v proportional sind, d.h. A ist dann die identische Abbildung, welche trivialerweise in $\overline{U}$ liegt. Wir schreiben

$$H_u := \{x \in k^2 \mid < u, x > = 0\}$$

für die Ebene durch den Ursprung mit dem Normalenvektor u. Nach Definition bildet s_u die Vektoren von H_u in sich ab (und die dazu senkrechten in ihr Negatives), d.h. s_u ist die Spiegelung an der Ebene H_u. Weil u und v linear unabhängig sind, sind die beiden Ebenen H_u und H_v verschieden und

$$H_u \cap H_v \text{ ist eine Gerade (durch den Ursprung von } k^3),$$

d.h.

$$H_u \cap H_v = w\cdot k \text{ mit einem Vektor } w \in k^3 - \{0\}$$

Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen,

$$< u, u > = 1 = < v, v >.$$

Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. Fall. $H_u \cap H_v$ ist anisotrop.

Der Vektor w hat ein von 0 verschiedenes “Längenquadrat” $< w, w >$. Wir können annehmen, dieses ist gleich 1,

$$< w, w > = 1.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} s_u \circ s_v(w) &= s_u(w) && (\text{wegen } w \in H_v) \\ &= w && (\text{wegen } w \in H_u). \end{aligned}$$

Deshalb ist $k\cdot w$ ein linearer Unterraum, der bei $A = s_u \circ s_v$ in sich abgebildet wird. Das orthogonale Komplement

$$(k\cdot w)^\perp$$

ist ein komplementärer Unterraum,

$$k^3 = k\cdot w + (k\cdot w)^\perp, \quad k\cdot w \cap (k\cdot w)^\perp = 0,$$

der durch A ebenfalls in sich abgebildet wird. Bezüglich einer orthonormierten Basis, welche diese direkte Summenzerlegung respektiert, hat die Matrix von A die Gestalt[5]

[5] Die linke obere 1 kommt von der Identität $A\cdot w = w$.

$$S^{-1}\bullet A\bullet S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix}$$

mit einer Matrix $A' \in \mathbf{SO}_2$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\mathbf{SO}_2$ zusammenhängend. Deshalb ist

$$\{Id\}\times\mathbf{SO}_2 \subseteq \mathbf{SO}_3$$

eine zusammenhängende Untergruppe von $\mathbf{SO}_3$, welche insbesonderen die Eins enthält und damit ganz in der Komponente der Eins liegt. Es folgt

$$S^{-1}\bullet A\bullet S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix} \in \{Id\}\times\mathbf{SO}_2 \subseteq \bar{U}.$$

Weil $\bar{U}$ als Komponente der 1 ein Normalteiler von $\mathbf{O}_3$ ist, gilt damit

$$A \in S\bullet \bar{U}\bullet S^{-1} \subseteq \bar{U}.$$

2. <u>Fall</u>. $H_u \cap H_v$ ist isotrop.

Der Vektor w ist <u>isotrop</u>, d.h. $< w , w > = 0$. Der zwei-dimensionale Vektorraum

$$H_u = (k\bullet u)^{\perp}$$

hat die Struktur einer hyperbolischen Ebene (vgl. Lam [1], Kapitel 1, §3, Satz 3.2), d.h. es gibt eine Basis von H_u, sagen wir

$$\begin{aligned} &H_u = k\bullet u' + k\bullet u'' \text{ mit} \\ &<u',u'> = 1 \\ &< u'', u'' > = -1 \\ &< u', u'' > = 0 \end{aligned}$$

Das Skalarprodukt $< , >$ hat also bezüglich der Basis $\{u', u''\}$ auf H_u die Gestalt

$$< c'u' + c''u'', d'u' + d''u'' > = c'd' - c''d''.$$

Die isotropen Vektoren von H_u sind durch die Bedingung

$$0 = < c'u' + c''u'', c'u' + c''u''> = c'^2 - c''^2 = (c'-c'')\bullet(c'+c'').$$

gegeben. Der Raum H_u enthält somit genau zwei <u>total isotrope Unterräume</u> (d.h. Räume die nur aus isotropen Vektoren bestehen), nämlich

$k\bullet(u'+u'')$ und $k\bullet(u'-u'')$ sind die einzigen total isotropen Unterräume von H_u.

Im hier behandelten Fall ist $H_u \cap H_v$ einer dieser beiden total isotropen Unterräume. Wir können O.B.d.A annehmen

$$H_u \cap H_v = k\bullet(u'+u'').$$

Die Vektoren $v = \xi\bullet u + \eta\bullet u' + \zeta\bullet u''$ und $u'+u''$ stehen dann senkrecht aufeinander, d.h.

$$\begin{aligned} 0 &= < \xi\bullet u + \eta\bullet u' + \zeta\bullet u'', u'+u'' > \\ &= \eta - \zeta, \end{aligned}$$

d.h. v hat die Gestalt

$$v = \xi\bullet u + \eta\bullet(u'-u'')$$

Wegen $< v , v > = 1 = < u, u >$, $u \perp u'$, $u \perp u''$ (also $u \perp u' - u''$) ist außerdem

$$\begin{aligned} 1 &= \xi^2 + \eta^2\bullet< u'-u''> \\ &= \xi^2 + \eta^2\bullet(<u', u'> + < u'', u''> - < u', u'' > - < u'', u' >) \end{aligned}$$

$$= \xi^2 + \eta^2\bullet(1 - 1 - 0 - 0)$$
$$= \xi^2.$$

Da sich die Spiegelung s_v nicht ändert wenn wir v durch -v ersetzen, können wir o.B.d.A. annehmen $\xi = 1$, d.h.

$$v = u + \eta\bullet(u'-u'').$$

Die Formeln für s_u und s_v bekommen damit die Gestalt

$$s_u(x) = x - 2\bullet\frac{<x,u>}{<u,u>}\bullet u = x - 2< x, u >\bullet u$$

$$s_u(\alpha\bullet u + \beta\bullet u' + \gamma\bullet u'') = \alpha\bullet u + \beta\bullet u' + \gamma\bullet u'' - 2\bullet\alpha\bullet u$$
$$= -\alpha\bullet u + \beta\bullet u' + \gamma\bullet u''$$

$$s_v(x) = x - \frac{<x,v>}{<v,v>}\bullet v = x - 2< x, v >\bullet v$$

$$s_v(\alpha\bullet u + \beta\bullet u' + \gamma\bullet u'') = \alpha\bullet u+\beta\bullet u'+\gamma\bullet u'' - 2\alpha\bullet<u,v>\bullet v$$
$$= \alpha\bullet u+\beta\bullet u'+\gamma\bullet u'' - 2\alpha\bullet<u,v>\bullet(u + \eta\bullet(u'-u''))$$
$$= \alpha\bullet(1-2\bullet<u,v>)\bullet u+(\beta-2\alpha\eta\bullet< u,v >)\bullet u'+(\gamma+2\alpha\eta\bullet< u,v >)\bullet u''$$

Wir wollen jetzt die Matrizen dieser Abbildungen aufschreiben. Um den Vergleich mit den entsprechenden Matrizen bezüglich der Standard-Einheitsbasis zu vereinfachen, ersetzen wir den Basisvektor u'' durch $\sqrt{-1}\bullet u''$, wobei

$$\sqrt{-1} \in k$$

ein Element des algebraisch abgeschlossenen Körpers k mit dem Quadrat -1 sein soll. Wir erhalten

$$s_u(\alpha\bullet u + \beta\bullet u' + \gamma\bullet \sqrt{-1}\bullet u'') = -\alpha\bullet u + \beta\bullet u' + \gamma\bullet \sqrt{-1}\bullet u''$$

$$s_v(\alpha\bullet u + \beta\bullet u' + \gamma\bullet \sqrt{-1}\bullet u'')$$
$$= \alpha\bullet(1-2\bullet<u,v>)\bullet u+(\beta-2\alpha\eta\bullet< u,v >)\bullet u'+(\gamma\bullet \sqrt{-1}+2\alpha\eta\bullet< u,v >)\bullet u''$$
$$= \alpha\bullet(1-2\bullet<u,v>)\bullet u+(\beta-2\alpha\eta\bullet< u,v >)\bullet u'+(\gamma-2\alpha\eta\bullet< u,v >\bullet \sqrt{-1})\bullet \sqrt{-1}\bullet u''$$

Bezeichne

$$M(B) = M_{u,u',\sqrt{-1}\bullet u''}(B)$$

die Matrix der linearen Abbildung B bezüglich der Basis u, u', $\sqrt{-1}\bullet u''$. Dann gilt

$$M(s_u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M(s_v) = \begin{pmatrix} 1-2<u,v> & 0 & 0 \\ -2\eta<u,v> & 1 & 0 \\ -2\eta<u,v>\sqrt{-1} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

also

$$M(A) = M(s_u\circ s_v)$$
$$= M(s_u)\bullet M(s_v)$$

$$= \begin{pmatrix} -1+2\langle u,v\rangle & 0 & 0 \\ -2\eta\langle u,v\rangle & 1 & 0 \\ -2\eta\langle u,v\rangle\sqrt{-1} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit ist

$$1_3 + M(A) = \begin{pmatrix} 2\langle u,v\rangle & 0 & 0 \\ -2\eta\langle u,v\rangle & 2 & 0 \\ -2\eta\langle u,v\rangle\sqrt{-1} & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und

$$\det(1_3 + M(A)) = 2^3 \bullet \det \begin{pmatrix} \langle u,v\rangle & 0 & 0 \\ -\eta\langle u,v\rangle & 1 & 0 \\ -\eta\langle u,v\rangle\sqrt{-1} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= 8 \bullet \langle u, v\rangle.$$

Die Vektoren u, u', $\sqrt{-1}\bullet u''$ stehen paarweise aufeinander senkrecht und haben das "Längenquadrat" 1:

$$\langle u, u\rangle = 1,\ \langle u', u'\rangle = 1,\ \langle \sqrt{-1}\bullet u'', \sqrt{-1}\bullet u''\rangle = -\langle u'', u''\rangle = 1.$$

Weil die Standard-Einheitsvektoren e_1, e_2, e_3 ebenfalls paarweise senkrecht aufeinander stehen und die "Längenquadrate" 1 haben, gibt es eine orthogonale Matrix S mit

$$S\bullet e_i = u_i \text{ mit } u_1 := u,\ u_2 := u',\ u_3 := \sqrt{-1}\bullet u''$$

Nach Definition der Matrix $M(s_u \circ s_v)$ gilt

$$\begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \xi'_3 \end{pmatrix} = M(s_u \circ s_v) \bullet \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{3} \xi'_i u_i = s_u \circ s_v\left(\sum_{i=1}^{3} \xi_i u_i\right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{3} \xi'_i\, S\bullet e_i = s_u \circ s_v\left(\sum_{i=1}^{3} \xi_i\, S\bullet e_i\right)$$

$$\Leftrightarrow S\bullet \sum_{i=1}^{3} \xi'_i\, e_i = A\bullet S\left(\sum_{i=1}^{3} \xi_i e_i\right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{3} \xi'_i\, e_i = S^{-1}\bullet A\bullet S\left(\sum_{i=1}^{3} \xi_i e_i\right)$$

also

$$M(A) = M(s_u \circ s_v) = S^{-1}\bullet A\bullet S$$

also

$$\begin{aligned} \det(1+A) &= \det(S^{-1}\bullet(1+A)\bullet S) \\ &= \det(1 + S^{-1}\bullet A\bullet S) \\ &= \det(1 + M_{u,u',u''}(A)) \end{aligned}$$

$= 8\bullet\langle u, v\rangle.$

Zum Beweis der Behauptung, daß A in $\overline{U}$ liegt, reicht es, zu zeigen, daß

$$\langle u, v\rangle \neq 0$$

gilt. Denn dann liegt A sogar in U (man beachte, weil die Charakteristik von k ungleich 2 ist gilt dann auch $8\bullet\langle u, v\rangle \neq 0$). Dazu betrachten wir das orthogonale Komplement des eindimensionalen Unterraums

$$H_u \cap H_v = k\bullet(u'+u'').$$

Weil $H_u \cap H_v$ total isotrop ist, gilt

$$H_u \cap H_v \subseteq (H_u \cap H_v)^\perp = k\bullet w + k\bullet w'.$$

Deshalb können wir eine Basis {w, w'} des orthogonalen Komplements mit

$$w = u'+u'' \text{ (und damit } w' \perp w)$$

wählen. Wegen $u, v \in H_u \cap H_v$ gilt

$$u = \alpha\bullet w + \beta\bullet w' \text{ und } v = \gamma\bullet w + \delta\bullet w'$$

mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in k$. Es folgt

$$1 = \langle u, u\rangle = \alpha^2\bullet\langle w, w\rangle + \beta^2\bullet\langle w', w'\rangle = \beta^2\bullet\langle w', w'\rangle$$
$$1 = \langle v, v\rangle = \gamma^2\bullet\langle w, w\rangle + \delta^2\bullet\langle w', w'\rangle = \delta^2\bullet\langle w', w'\rangle$$

(weil $H_u \cap H_v = k\bullet(u'+u'')$ total isotrop ist). Insbesondere ist w' anisotrop. Wir können die Länge von w so abändern, daß $\langle w', w'\rangle = 1$ gilt, also

$$\beta^2 = \delta^2 = 1.$$

Indem wir bei Bedarft w' durch -w' ersetzen, erreichen wir noch,

$$\beta = \delta = 1,$$

d.h.

$$u = \alpha\bullet w + w' \text{ und } v = \gamma\bullet w + w',$$

also

$$u - v = (\alpha-\gamma)\bullet w.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\langle u, v\rangle &= \langle v+(\alpha-\gamma)\bullet w, v\rangle \\ &= \langle v, v\rangle + (\alpha-\gamma)\bullet\langle w, v\rangle \\ &= \langle v, v\rangle \qquad \text{(wegen } w \in H_u \cap H_v \subseteq H_v) \\ &= 1 \\ &\neq 0\end{aligned}$$

Es folgt $\det(1+A) = 8\bullet\langle u,v\rangle \neq 0$, also $A \in U \subseteq \overline{U}$, wie behauptet.

4. Schritt. Der Fall $n \geq 4$.

Nach dem Satz von Dieudonné ist jede Matrix von

$$\mathbf{O}_n$$

die Zusammensetzung von eindlich vielen Spiegelungen s_u (vgl. Lam [1], Kapitel 1, §7, Folgerung 7.1),

$$s_u(x) = x - 2\bullet\frac{\langle x,u\rangle}{\langle u,u\rangle}\bullet u$$

mit einem anisotropen Vektor $u \in k^3$ (d.h. $\langle u, u\rangle \neq 0$). Eine Zusammensetzung von solchen Spiegelungen liegt genau dann in

$$\mathbf{SO}_n$$

wenn die Anzahl der Faktoren gerade ist. Das liegt daran, daß die Determinante einer Spiegelung gleich -1 ist (vgl. Lam [1], Kapitel 1, §4, die Bemerkungen nach Folgerung 4.4). Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen, daß die Zusammensetzung von je zwei Spiegelungen

$$A = s_u \circ s_v$$

mit anisotropen Vektoren $u, v \in k^n$ (d.h. $\langle u, u\rangle \neq 0$ und $\langle v, v\rangle \neq 0$) in der Komponente der Eins liegen,

$$A \in \bar{U}.$$

Wir können annehmen, die beiden (anisotropen) Vektoren

u und v sind linear unabhängig,

da die identische Abbildung trivialerweise in $\bar{U}$ liegt. Die Hyperebenen H_u und H_v durch den Ursprung mit den Normalenvektoren u bzw. v sind dann verschieden und haben eine Durchschnitt der Dimension

$$\dim H_u \cap H_v = n-2.$$

Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen,

$$\langle u, u \rangle = 1 = \langle v, v \rangle.$$

Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. Fall. Es gibt einen Vektor $w \in H_u \cap H_v$ mit $\langle w, w \rangle \neq 0$.

Wir gehen dann in analoger Weise vor wie im Fall n = 3. Wir können annehmen

$$\langle w, w \rangle = 1.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} s_u \circ s_v(w) &= s_u(w) && \text{(wegen } w \in H_v) \\ &= w && \text{(wegen } w \in H_u). \end{aligned}$$

Deshalb ist $k \bullet w$ ein linearer Unterraum, der bei $A = s_u \circ s_v$ in sich abgebildet wird. Das orthogonale Komplement

$$(k \bullet w)^{\perp}$$

ist ein komplementärer Unterraum,

$$k^n = k \bullet w + (k \bullet w)^{\perp}, \quad k \bullet w \cap (k \bullet w)^{\perp} = 0,$$

der durch A ebenfalls in sich abgebildet wird. Bezüglich einer orthonormierten Basis, welche diese direkte Summenzerlegung respektiert, hat die Matrix von A die Gestalt[6]

$$S^{-1} \bullet A \bullet S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix}$$

mit einer Matrix $A' \in \mathbf{SO}_{n-1}$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\mathbf{SO}_{n-1}$ zusammenhängend. Deshalb ist

$$\{Id\} \times \mathbf{SO}_{n-1} \subseteq \mathbf{SO}_n$$

eine zusammenhängende Untergruppe von $\mathbf{SO}_n$, welche insbesonderen die Eins enthält und damit ganz in der Komponente der Eins liegt. Es folgt

$$S^{-1} \bullet A \bullet S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix} \in \{Id\} \times \mathbf{SO}_{n-1} \subseteq \bar{U}.$$

Weil $\bar{U}$ als Komponente der 1 ein Normalteiler von $\mathbf{O}_n$ ist, gilt damit

$$A \in S \bullet \bar{U} \bullet S^{-1} \subseteq \bar{U}.$$

---

[6] Die linke obere 1 kommt von der Identität $A \bullet w = w$.

2. Fall. Es gibt keinen Vektor $w \in H_u \cap H_v$ mit $< w, w > \neq 0$.
Wir zeigen, daß dieser Fall nicht eintritt im Fall $n \geq 4$. Nach Voraussetzung ist jeder Vektor von $H_u \cap H_v$ zu sich selbst orthogonal, d.h. $H_u \cap H_v$ ist total isotrop.
Deshalb gilt

$$2\bullet\dim H_u \cap H_v \leq n$$

(vgl. Lam [1], Kapitel 1, §3, Satz 3.4 (1)). Wegen $\dim H_u \cap H_v = n - 2$ (siehe oben), bekommt diese Abschätzung die Gestalt $2n - 4 \leq n$, also $n \leq 4$, also

$$n = 4.$$

Weil jeder Vektor von $H_u \cap H_v$ isotrop ist, liegt der Unterraum in seinem eigenen orthogonalen Komplement,

$$H_u \cap H_v \subseteq (H_u \cap H_v)^\perp.$$

Für die Dimension dieses orthogonalen Komplements erhalten wir (nach Lam [1], Kapitel 1, §1, Proposition 1.3)

$$\begin{aligned}\dim H_u \cap H_v)^\perp &= n - \dim H_u \cap H_v \\ &= n - (n-2) \\ &= 2 \\ &= 4 - 2 \\ &= n - 2 \\ &= H_u \cap H_v.\end{aligned}$$

Damit gilt sogar

$$H_u \cap H_v = (H_u \cap H_v)^\perp.$$

Weil u und v nach Definition von $H_u = (k\bullet u)^\perp$ und $H_v = (k\bullet v)^\perp$ auf jedem Vektor von $H_u \cap H_v$ senkrecht stehen folgt

$$u, v \in (H_u \cap H_v)^\perp = H_u \cap H_v.$$

Das ist aber nicht möglich, denn alle Vektoren von $H_u \cap H_v$ sind nach Voraussetzung isotrop, während u und v (ebenfalls nach Voraussetzung) anisotrop sind. Dieser Widerspruch zeigt, daß der hier betrachtete zweite Fall nicht eintritt.
QED.

Beweis von (c) (geometrische Variante)
Wir haben die Irrduzibilität von $\mathbf{SO}_n$ zu beweisen.

1. Schritt. Irreduzibilität der Einheitssphäre im k^n
Sei

$$X := S^{n-1} := \{ x \in k^n \mid <x, x> = 1 \}$$

die Einheitsphäre im k^n (oder auch (n-1)-Sphäre). Wir bezeichnen hier mit $< x, y >$ das Standard-Skalarprodukt des k^n,

$$< x , y > = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \text{ für } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ und } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Die (n-1)-Sphäre ist eine affine algebraische Varietät mit dem Koordinatenring

$$k[S^{n-1}] = k[T_1,...,T_n]/(f) \text{ mit } f := T_1^2+...+T_n^2 - 1.$$

Wir wollen zeigen:

$$X = S^{n-1} \text{ ist eine irreduzible Varietät für jedes } n > 1.$$

Zum Beweis reicht es zu zeigen,

$$f = T_1^2+...+T_n^2 - 1 \text{ ist irreduzibel in } k[T_1,...,T_n],$$

denn $k[T_1,...,T_n]$ ist ein ZPE-Ring, so daß dann (f) ein Primideal ist (also $k[S^{n-1}]$ nullteilerfrei, also S^{n-1} irreduzibel).
Wir beweisen die Irreduzibilität von f durch Induktion nach n.
Induktionsanfang: n = 2.
Es gilt $f = T_1^2 + T_2^2 -1$. Wir betrachten f als Polynom in T_2 mit Koeffizienten aus $k[T_1]$.
Das Absolutglied von f ist dann

$$T_1^2 - 1 = (T_1 + 1)\bullet(T_1 - 1).$$

Weil die Charakteristik von k ungleich 2 sein soll, sind die beiden Faktoren teilerfremde Primelemente von $k[T_1]$. Das Absolutglied ist kein Quadrat, d.h. f ist ein Eisenstein-Polynom und damit irreduzibel.
Induktionsschritt: n > 2.
Wir betrachten f als Polynom in T_n mit Koeffizienten aus $k[T_1,...,T_{n-1}]$. Das Absolutglied

$$T_1^2+...+T_{n-1}^2 - 1$$

von f, ist nach Induktionsvoraussetzung irreduzibel. Damit ist das quadratische Polynom f ein Eisenstein-Polynom, also irreduzibel.
2. Schritt. Die Abbildung

$$\varphi: S^{n-1} \longrightarrow \mathbf{O}_n, v \mapsto s_v ,$$

ist ein wohldefinierter Morphismus von affinen algebraischen Varietäten. Dabei soll s_v die (Matrix der) Spiegelung an der zum Vektor v senkrechten Hyperebene sein.

Wir verwenden hier das Standard-Skalarprodukt < , > des k^n. Die zu $v \in S^{n-1}$ senkrechte Hyperebene ist die Menge

$$H_v = \{w \in k^n \mid < v, w> = 0 \}$$

Die Spiegelung s_v ist die eindeutig bestimmte lineare Abbildung

$$s_v: k^n \longrightarrow k^n, w \mapsto w - 2\bullet<w, v >\bullet v,$$

welche die Punkte der Hyperebene H_v fest läßt und den zur Hyperebene senkrechten Vektor v in sein Negativen abbildet.
Für $x \in S^{n-1}$ ist

$$s_v(x) \quad = x - 2\bullet v\bullet<v,x>$$

$= \mathrm{Id}\cdot x - 2\cdot v\cdot v^T\cdot x$ (Matrizen-Multiplikation)

$= (\mathrm{Id} - 2\cdot v\cdot v^T)\cdot x$

Die Matrix der linearen Abbildung s_v ist damit gleich $\mathrm{Id} - 2\cdot v\cdot v^T$ und φ ist die Abbildung

$$\varphi: S^{n-1} \longrightarrow \mathbf{O}_n,\ v \mapsto \mathrm{Id} - 2\cdot v\cdot v^T.$$

Da die Einträge der Matrix $\mathrm{Id} - 2\cdot v\cdot v^T$ Polynome in den Koordinaten von v sind, ist dies ein Morphismus affiner Varietäten.
3. Schritt. $\mathbf{SO}_n$ ist als Varietät irreduzibel, also zusammenhängend.

Jede orthogonale Transformation ist des k^n ist Zusammensetzung von $\le$ n Spiegelungen Ihre Determinante ist genau dann gleich 1, wenn sie in eine gerade Anzahl von Spiegelungen zerfällt.

Der Morphismus affiner algebraischer Varietäten

$$S^{n-1}\times\ldots\times S^{n-1} \longrightarrow \mathbf{SO}_n,\ (v_1,\ldots,v_s) \mapsto \varphi(v_1)\cdot\ldots\cdot\varphi(v_s),$$

ist wohldefiniert, wenn die Anzahl s der Faktoren links gerade ist, und er ist surjektiv für zum Beispiel s = 2n. Das Produkt links ist irreduzibel (weil die Faktoren irreduzibel sind). Als stetiges Bild eines irreduziblen topologischen Raums ist dann aber auch $\mathbf{SO}_n$ irreduzibel.

Aufgabe 3
Die Varietät

$$X = \{(x,y) \in k^2 \mid xy = 0\}.$$

von 1.2.8 (3) kann nicht die zugrundeliegende Varietät einer algebraischen Gruppe sein.

Beweis. Nach Aufgabe 1.2.8(3) ist X zusammenhängend aber nicht irreduzibel. Für algebraische Gruppen ist die Forderung der Irreduzibilität aber äquivalent zu der zusammenhängend zu sein. Deshalb kann X nicht die Struktur einer algebraischen Gruppe besitzen.
QED.

Aufgabe 4
Seien G eine zusammenhängende algebraische Gruppe und N ein endlicher Normalteiler von G. Dann liegt N im Zentrum von G. Hinweis: man betrachte für $n \in N$ die Abbildung $G \longrightarrow G,\ x \mapsto xnx^{-1}$.

Beweis. Weil N ein Normalteiler ist, liegt xnx^{-1} in N für jedes $n \in N$ und jedes $x\in G$. Die Werte der angegebenen Abbildung liegen in N. Wir erhaltgen so einen Morphismus

$$G \longrightarrow N,\ x \mapsto xnx^{-1}.$$

Weil G zusammenhängend ist, ist es auch das Bild in N. Die Zusammenhangskomponenten einer endlichen Varietät sind die einpunktigen Teilmengen. Deshalb muß der Morphismus konstant sein. Weil n im Bild liegt (denn es ist $ene^{-1} = n$), folgt

$$xnx^{-1} = x \text{ für jedes } x \in G,$$

d.h. n kommutiert mit jedem Element von G, liegt also im Zentrum von G.
QED.

2.2.3 Zerlegung in ein Produkt dichter offener Teilmengen
Seien U und V zwei dichte offene Teilmengen der algebraischen Gruppe G. Dann gilt

$$G = U \bullet V.$$

Beweis.

1. Schritt. Seien $G_1, \ldots, G_n$ die irreduziblen Komponenten von G. Für eine Teilmenge $S \subseteq G$ sind dann die folgenden Aussagen äquivalent.

1. S ist dichte offene Teilmenge von G.
2. $S \cap G_i$ ist dichte offene Teilmenge von G_i für $i = 1,\ldots,n$.

Beweis von $1 \Rightarrow 2$. Weil S offen ist in G, ist $S \cap G_i$ offen in der abgeschlossenen Teilmenge G_i von G.

Die Menge

$$G - G_1 \cup \ldots \cup G_{i-1} \cup G_{i+1} \cup \ldots \cup G_n \qquad (\subseteq G_i)$$

ist offen G (weil die Komponenten abgeschlossen sind). Weil S dicht liegt in G, hat S mit dieser offenen Menge Punkte gemeinsam, also erst recht mit der größeren Menge G_i, d.h.

$$S \cap G_i \text{ ist eine nicht-leere offene Teilmenge von } G_i.$$

Weil G_i irreduzibel ist, liegt $S \cap G_i$ dicht in G_i.

Beweis von $2 \Rightarrow 1$. Weil $S \cap G_i$ offen ist in G_i, ist

$$G_i - S \cap G_i$$

abgeschlossen in G_i und damit - weil die Komponente G_i abgeschlossen ist in G - ist

$$G_i - S \cap G_i \text{ abgeschlossen in } G.$$

Dann ist aber auch die endliche Vereinigung

$$\cup_{i=1}^{n} (G_i - S \cap G_i) = \cup_{i=1}^{n} (G_i - S) = G - S$$

abgeschlossen in G, d.h. S ist offen in G.

Wir haben noch zu zeigen, S liegt dicht in G. Sei $U \subseteq G$ eine nicht-leere offene Teilmenge von G. Wir haben zu zeigen, $S \cap U$ ist nicht leer.

Weil U nicht leer ist, gibt es ein i mit $U \cap G_i \neq \emptyset$. Dann ist $U \cap G_i$ eine nicht-leere offene Teilmenge von G_i. Nach Voraussetzung liegt $S \cap G_i$ dicht in G_i, also ist der folgende Durchschnitt nicht leer:

$$(U \cap G_i) \cap (S \cap G_i) = U \cap S \cap G_i.$$

Dann ist aber auch $U \cap S$ nicht leer.

2. Schritt. Abschluß des Beweises.

Sei $x \in G$ vorgebeben. Dann sind xV^{-1} und U ebenfalls dichte offene Teilmengen von G. Nach dem ersten Schritt sind

$$xV^{-1} \cap G_i \text{ und } U \cap G_i \text{ dichte offene Teilmengen von } G_i$$

für jedes i. Weil G_i irreduzibel ist, ist ihr Durchschnitt nicht leer. Dann ist aber auch

$$xV^{-1} \cap U$$

nicht leer. Sei y aus diesem Durchschnitt. Dann gilt

$$x \in y \bullet V \text{ und } y \in U,$$

also $x \in U \cdot V$.
QED.

2.2.4 Eigenschaften von Untergruppen algebraischer Gruppen

Seien G eine algebraische Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe von G. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) Die Abschließung $\overline{H}$ ist eine Untergruppe von G.

(ii) Enthält H eine nicht-leere offene Teilmenge von $\overline{H}$, so ist H abgeschlossen.

Beweis. Zu (i). 1. Schritt. für die Multiplikation μ von G gilt $\mu(\overline{H}\times\overline{H}) \subseteq \overline{H}$.

Sei $x \in H$. Dann gilt

$$H = x \cdot H \subseteq x \cdot \overline{H}.$$

Weil $x \cdot \overline{H}$ abgeschlossen ist, folgt $\overline{H} \subseteq x \cdot \overline{H}$, also $x^{-1} \cdot \overline{H} \subseteq \overline{H}$. Weil dies für jedes x aus der Gruppe H gilt, folgt

$$H \cdot \overline{H} \subseteq \overline{H}. \qquad (1)$$

Sei $x \in \overline{H}$. Wegen (1) gilt dann $H \cdot x \subseteq \overline{H}$, also $H \subseteq \overline{H} \cdot x^{-1}$. Weil $\overline{H} \cdot x^{-1}$ abgeschlossen ist, folgt $\overline{H} \subseteq \overline{H} \cdot x^{-1}$, also $x \cdot \overline{H} \subseteq \overline{H}$ für jedes $x \in \overline{H}$. Mit anderen Worten, es gilt $\mu(\overline{H}\times\overline{H}) \subseteq \overline{H}$.

2. Schritt. für den Antipoden ι von G gilt $\iota(\overline{H}) = \overline{H}$.
Weil der Übergang zum Inversen ein Automorphismus von G ist, gilt

$$(\overline{H})^{-1} = \overline{H^{-1}} = \overline{H}.$$

3. Schritt. Abschluß des Beweises.
Nach den ersten beiden Schritten definieren die Multiplikation von G und der Übergang zum Inversen, Morphismen

$$\overline{H}\times\overline{H} \longrightarrow \overline{H} \text{ und } \overline{H} \longrightarrow \overline{H}.$$

Aus den kommutativen Diagrammen, welche für die Gruppen-Axiome für G stehen, erhält man durch Einschränken die analogen kommutativen Diagramme für $\overline{H}$. Deshalb ist $\overline{H}$ eine Untergruppe von G.

Zu (ii). Sei $U \subseteq H$ eine nicht-leere Menge, welche offen ist in $\overline{H}$. Dann ist H als Vereinigung von Verschiebungen von U offen in $\overline{H}$. Nach 2.2.3 gilt

$$\overline{H} = H \cdot H = H,$$

d.h. H ist abgeschlossene Untergruppe.
QED.

2.2.5 Kern und Bild von Homomorphismen, die Komponente der Eins

Sei ϕ: G $\longrightarrow$ G' ein Homomorphismus von algebraischen Gruppen. Dann gelten folgende Aussagen.

(i) Ker(ϕ) ist ein abgeschlossener Normalteiler von G.

(ii) Im(ϕ) ist eine abgeschlossene Untergruppe von G'.

(iii) Sind G und G' beides F-Gruppen und ist ϕ über F definiert, so ist ϕ(G) eine F-Untergruppe von G.

(iv) $\phi(G^0) = (\phi(G))^0$.

Beweis. Zu (i). Als Kern eines Gruppen-Homomorphismus ist Ker(ϕ) ein Normalteiler.

Zum Beweis der Abgeschlossenheit beachsten wir, jede einpunktige Menge einer algebraischen Varietät ist abgeschlossen. Das gilt insbesondere für die Menge

$$\{e'\} \subseteq G',$$

die nur aus dem neutralen Element von G' besteht. Als Morphismus algebraischer Varietäten ist $\phi: G \longrightarrow G'$ stetig. Deshalb ist

$$\mathrm{Ker}(\phi) = \phi^{-1}(\{e'\})$$

eine abgeschlossene Teilmenge von G.
Zu (ii). Als Bild einer Gruppe bei einem Gruppen-Homomrophismus ist

$$\phi(G) \subseteq G'$$

eine Untergruppe von G'. Als Bild bei einem Morphismus enthält $\phi(G)$ eine nicht-leere Teilmenge, welche offen ist in der Abschließung $\overline{\phi(G)}$ (nach 1.9.5). Nach 2.2.4 (ii) ist die Untergruppe $\phi(G)$ von G' dann aber selbst abgeschlossen.
Zu (iii). Weil $\phi: G \longrightarrow G'$ ein über F definierter Morphismus von F-Varietäten ist, hat die Abschließung des Bildes

$$\overline{\phi(G)} \subseteq G'$$

die Struktur einer F-Varietät (nach 1.9.1 (iv)). Nach (ii) ist $\phi(G)$ abgeschlossene Untergruppe von G', d.h.

$$\phi(G) = \overline{\phi(G)}$$

ist eine F-Varietät und eine abgeschlossene Untergruppe von G', also eine F-Untergruppe (vgl. 2.1.1.1).
Zu (iv). Das Bild der 1-Komponente

$$\phi(G^0)$$

ist eine abgeschlossene Untergruppe von G' (nach (ii) angewandt auf $\phi|_{G^0}$) und ist zusammenhängend (nach 1.2.3(ii) - weil irrduzibel und zusammenhängend für algebraische Gruppe dasselbe bedeutet).

Weil G^0 einen endlichen Index in G hat, d.h. G ist Vereinigung endlich vieler Nebenklassen modulo G^0, hat auch $\phi(G^0)$ einen endlichen Index in $\phi(G)$. Deshalb gilt

$$\phi(G)^0 \subseteq \phi(G^0)$$

(nach 2.2.1.1 (iii)). Weil $\phi(G^0)$ zusammenhängend ist, ist die Nebenklassen-Zerlegung bezüglich $\phi(G)^0$ in endlich viele disjunkte abgeschlossene Teilmengen trivial, d.h. es gilt das Gleichheitszeichen.
QED.

2.2.6 Erzeugung algebraischer Gruppen durch irreduzible Varietäten

Sei

$$\{\phi_i: X_i \longrightarrow G\}_{i\in I}$$

eine Familie von Morphismen, wobei die X_i irreduzible Varietäten seien und G eine algebraischen Gruppe G. Wir nehmen an, das neutrale Element von G liegt in allen Bildern,

$$e \in \phi_i(X_i) \text{ für jedes } i \in I,$$

und setzen

$$H = \bigcap \{ H' \mid H' \text{ abgeschlossene Untergruppe von G mit } \phi_i(X_i) \subseteq H' \text{ für } i\in I\},$$

d.h. H ist die kleinste abgeschlossene Untergruppe von G, welche die Bilder der ϕ_i enthält. Dann gelten folgende Aussagen.

(i) H ist zusammenhängend.

(ii) Es gibt eine nicht-negative ganze Zahl n, ein n-Tupel von Elementen aus I,

$$a = (a(1),\ldots, a(n)) \in I^n$$

und ein n-Tupel von Vorzeichen

$$(\varepsilon(1),\ldots,\varepsilon(n)) \in \{+1, -1\}^n$$

mit

$$H = \mathrm{Im}(\phi_{a(1)})^{\varepsilon(1)}\bullet\ldots\bullet\mathrm{Im}(\phi_{a(n)})^{\varepsilon(n)}.$$

(iii) Angenommen G ist eine F-Gruppe, alle X_i sind F-Varietäten und alle ϕ_i sind definiert über F. Dann ist H eine F-Untergruppe von G.

Beweis. Wir können annehmen, in der Familie der Bilder

$$Y_i := \phi_i(X_i)$$

der ϕ_i kommt mit jedem Y_i auch die Menge Y_i^{-1} vor. Wir können so die Bezeichnungsweise im folgenden vereinfachen und die $\varepsilon(i)$ weglassen.

Für jedes

$$a = (a(1),\ldots, a(n)) \in I^n$$

schreiben wir

$$Y_a := Y_{a(1)}\bullet\ldots\bullet Y_{a(n)}.$$

Als stetiges Bild eines Produkts irreduzibler Varietäten ist Y_a irreduzibel, und dasselbe gilt auch für die Abschließung $\overline{Y}_a$ von Y in G (nach 1.2.3(i)). Außerdem enthält jedes der $\overline{Y}_a$ das neutrale Element von G. Als zusammenhängende Teilmenge von G muß damit $\overline{Y}_a$ ganz in G^0 enthalten sein:

Für jedes Tupel a von Elementen aus I sind Y_a und $\overline{Y}_a$ irreduzible Teilmengen von G mit

$$e \in Y_a \subseteq \overline{Y}_a \subseteq G^0.$$

Insbesondere gilt

$$\dim \overline{Y}_a \le \dim G^0 = \dim G.$$

Nach Definition gilt

$$Y_b\bullet Y_c = Y_{(b,c)} \text{ für } b \in I^m \text{ und } c \in I^n,$$

wenn (b,c) das (m+n)-Tupel bezeichnet, welches durch Aneinanderfügen der Koordinanten von b und c entsteht. Wie im Beweis von 2.2.4[7] sehen wir

[7] Für $x \in Y_b$ gilt $x\bullet Y_c \subseteq Y_{(b,c)} \subseteq \overline{Y_{(b,c)}}$, also

$$Y_c \subseteq x^{-1}\bullet \overline{Y_{(b,c)}}.$$

Weil die Menge rechts abgeschlossen ist, folgt $\overline{Y}_c \subseteq x^{-1}\bullet \overline{Y_{(b,c)}}$, also

$$x\bullet \overline{Y}_c \subseteq \overline{Y_{(b,c)}} \text{ für jedes } x \in Y_b.$$

$$\overline{Y}_b \cdot \overline{Y}_c \subseteq \overline{Y_{(b,c)}}\ .$$

Wir wählen jetzt unter den Tupeln von Elementen aus I ein solches, für welches

$$\dim \overline{Y}_a \text{ maximal}$$

ist. Dann gilt für jedes b

$$\overline{Y}_a \subseteq \overline{Y}_a \cdot \overline{Y}_b \subseteq \overline{Y_{(a,b)}}$$

und wegen der Maximalität der Dimension von $\overline{Y}_a$ muß überall das Gleichheitszeichen gelten (nach 1.8.2), d.h. es ists

$$\overline{Y}_a = \overline{Y}_a \cdot \overline{Y}_b \supseteq \overline{Y}_b \text{ für jedes b.}$$

Damit ist $\overline{Y}_a$ multiplikativ abgeschlossen (b := a) und abgeschlossen gegenüber Inversenbildung (man wählen b so daß $Y_b = Y_a^{-1}$ ist und beachte, es gilt $\overline{Y}_a^{-1} = \overline{Y_a^{-1}}$, weil der Übergang zum Inversen ein Homöomorphismus ist). Mit anderen Worten

$\overline{Y}_a$ ist eine irreduzible abgeschlossene Untergruppe von G.

Als Abschließung des Bildes Y_a eines Morphismus enthält $\overline{Y}_a$ eine offene Teilmenge, die ganz in Y_a (nach 1.9.5)). Damit gilt aber

$$\overline{Y}_a = Y_a \cdot Y_a \subseteq H$$

(nach 2.2.3). Weil $\overline{Y}_a$ eine abgeschlossene Untergruppe von G ist, die alle Y_a enthält, muß nach Definition von H auch die umgekehrt Inklusion bestehten, d.h. es ist

$$H = \overline{Y}_a = Y_a \cdot Y_a,$$

Das erste Gleichheitszeichen bedeutet, H ist zusammenhängend, d.h. es gilt (i). Das zweite bedeutet, es gilt (ii).

Sind alle $\phi_i: X_i \longrightarrow G$ über F definierte Morphismen von F-Varietäten und ist G eine F-Gruppe, so sind für jedes $b = (b(1),...,b(m)) \in I^m$ auch die Abbildungen

$$X_{b(1)} \times ... \times X_{b(n)} \xrightarrow{\phi_{b(1)} \times ... \times \phi_{b(n)}} G \times ... \times G \longrightarrow G$$

über F definierte Morphismen von F-Varietäten, und die Abschließung $\overline{Y}_b$ des Bildes ist eine F-Teilvarietät (nach 1.9.1(iv)).

Das gilt insbesondere für b = a. In diesem Fall ist $H = \overline{Y}_a$ eine abgeschlossene Untergruppe von G mit einer F-Struktur, für welche die natürliche Einbettung in G über

---

Damit ist $Y_b \cdot y \subseteq \overline{Y_{(b,c)}}$ für jedes $y \in \overline{Y}_c$,also

$$Y_b \subseteq \overline{Y_{(b,c)}} \cdot y^{-1}.$$

Weil die Menge rechts abgeschlossen ist, folgt $\overline{Y}_b \subseteq \overline{Y_{(b,c)}} \cdot y^{-1}$ also

$$\overline{Y}_b \cdot y \subseteq \overline{Y_{(b,c)}} \text{ für jedes } y \in \overline{Y}_c,$$

also

$$\overline{Y}_b \cdot \overline{Y}_c \subseteq \overline{Y_{(b,c)}}.$$

F definiert ist (vgl. 1.6.14). Mit anderen Worten, H ist eine F-Untergruppe (vgl. 2.1.1.1). Damit gilt auch (iii).
QED.

2.2.7 Von abgeschlossenen Untergruppen erzeugte Untergruppen

Seien G eine algebraische Gruppe und $\{G_i\}_{i\in I}$ eine Familie von abgeschlossenen zusammenhängenden Untergruppen von G. Dann gilt:

(i) Die von den G_i erzeugte Untergruppe H ist abgeschlossen und zusammenhängend. Außerdem gibt es Indizes a(1), ... , a(n) $\in$ I (n $\geq$0) mit

$$H = G_{a(1)}\bullet\ldots\bullet G_{a(n)}.$$

(ii) Ist G außerdem eine F-Gruppe und ist G_i für jedes i eine F-Untergruppe, so ist H eine F-Untergruppe.

Beweis. Dies ist ein Spezialfall der Aussage von 2.2.6.
QED.

2.2.8 Die Kommutator-Untergruppe abgeschlossener Untergruppen

Seien G eine algebraische Gruppe und H und K abgeschlossene Untergruppen von G, von denen eine zusammenhängend ist,

$$H \subseteq G \text{ oder } K \subseteq G \text{ zusammenhängend.}$$

Dann gilt:

(i) Die Kommutator-Gruppe (H, K) ist abgeschlossene und zusammenhängende Untergruppe von G.

(ii) Ist außerdem G eine F-Gruppe und sind H und K F-Untergruppen von G, so ist auch (H, K) eine F-Untergruppe von G.

Beweis.
Zu (i). Wir nehmen an, die Untergruppe H ist die zusammenhängende der beiden. Dann erfüllt die Familie der Morphismen

$$\phi_i: H \longrightarrow G,\ x \mapsto xix^{-1}i^{-1}, \text{ mit } i \in K$$

die Bedingungen von 2.2.6. Man beachte $\phi_i(e) = i^{-1}i^{-1}$ e. Die Aussage folgt dann aus 2.2.6 (i) und 2.2.6 (ii).
Außerdem folgt aus 2.2.6 (ii), daß (H,K) das Bild eines Morphismus der Gestalt

$$(H\times K)^n \longrightarrow G,\ (h_1, k_1, \ldots , h_n, k_n) \mapsto \phi_{k_1}^{\varepsilon(1)}(h_1)\bullet\ldots\bullet \phi_{k_n}^{\varepsilon(n)}(h_n) \qquad (1)$$

ist.
Zu (ii). Die Aussage folgt aus 1.9.1 (iv) und der Tatsache, daß der Morphismus (1) in der betrachteten Situation ein über F definierter Morphismus von F-Varietäten ist.
QED.

2.2.9 Aufgaben

2.2.9 Aufgabe 1

(a) Geben sie einen weiteren Beweis dafür an, daß $\mathbf{SO}_n$ in der Charakteristik $\neq$ 2 zusammenhängend ist (vgl. 2.2.2 Aufage 2(c)) unter Verwendung von 2.2.7 und der Tatsache, daß $\mathbf{O}_n$ von “Symmetrien” erzeugt wird (vgl. Jacobson [4], Kapitel 6, Abschnitt 6.6, Satz von Cartan-Dieudonné und die Definitionen am Anfang von Kapitel 6, Abschnitt 6.4 oder Lam [1], Kapitel 1, §7, Satz 7.1 und die Definitionen in Kapitel 1, §4 nach Folgerung 4.4).

(b) Zeigen Sie mit einem ähnlichen Argument, daß $\mathbf{Sp}_{2n}$ zusammenhängend ist für jeden Körper k unter Verwendung der Tatsache, daß $\mathbf{Sp}_{2n}$ von 'symplektischen Transvektionen' erzeugt wird (vgl. Jacobson [4], Kapitel 6, Abschnitt 6.9, Lemma 1 und die Definitionen davor).

Beweis. Zu (a). Siehe die geometrische Variante des Beweises von 2.2.2 Aufgabe 2, Teil (c).

Zu (b). Jede symplektische Matrix

$$A \in \mathbf{Sp}_{2n}$$

ist Produkt von endlich vielen Matrizen von symplektischen Transvektionen. Eine symplektische Transvektion ist eine Abbildung der Gestalt

$$\tau_{u,c}: k^n \longrightarrow k^n,\ x \mapsto x + c\bullet B(x,u)\bullet u,$$

mit einem Vektor $u \in k^n - \{0\}$ und einer Konstanten $c \in k$. Dabei sei

$$B(x,y) := x^T\bullet J\bullet y \text{ mit } J = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrizen der linearen Abbildungen $\tau_{u,c}$ liegen in $\mathbf{Sp}_{2n}$ (vgl. Jacobson [4], Anfang von Abschnitt 6.9). Sie haben die Gestalt

$$M(\tau_{u,c}) := 1_{2n} - c\bullet(u\bullet u^T\bullet J),$$

denn es gilt

$$\begin{aligned} \tau_{u,c}(x) &= x + c\bullet(x^T\bullet J\bullet u)\bullet u \\ &= x + c\bullet u\bullet(u^T\bullet J^T\bullet x) && (x^T\bullet J\bullet u \text{ ist eine } 1\times 1\text{-Matrix}) \\ &= x - c\bullet u\bullet(u^T\bullet J\bullet x) && (J \text{ ist schiefsymmetrisch}) \\ &= (1_{2n} - c\bullet(u\bullet u^T\bullet J))\bullet x \end{aligned}$$

Da die Einträge der Matrix $M(\tau_{u,c})$ Polynome in c sind, ist für beliebige $u \in k^n-\{0\}$ die Abbildung

$$\tau_u: \mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbf{Sp}_{2n},\ c \mapsto M(\tau_{u,c}),$$

ein wohldefinierter Morphismus von affinen algebraischen Varietäten. Wegen $\tau_u(0) = 1_{2n}$ liegt das neutrale Element von $\mathbf{Sp}_{2n}$ im Bild des Morphismus. Weil $\mathbb{A}^1$ irreduzibel ist, genügt die Familie der τ_u den Bedingungen von 2.2.6. Deshalb ist die von den Bildern der τ_u erzeugte algebraische Gruppe zusammenhängend. Weil jede symplektische Matrix Produkt von Matrizen der Gestalt $M(\tau_{u,c})$ ist, ist dies die Gruppe $\mathbf{Sp}_{2n}$.

QED.

2.2.9 Aufgabe 2

Die Charakteristik von k sei von 2 verschieden. Zeigen Sie, das Komplement von $\mathbf{SO}_n$ in $\mathbf{O}_n$ ist irreduzibel und erzeugt $\mathbf{O}_n$. Folgern Sie, die Bedingung, daß Bilder der ϕ_i in 2.2.6 das neutrale Element enthalten sollen, kann nicht weggelassen werden.

Beweis. Sei $a \in \mathbf{O}_n$ eine n×n-Matrix mit der Determinante -1, z.B.

$$a = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix} \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Multiplikation mit a und a^{-1} definiert zueinander inverse Isomorphismen von Varietäten

$$\mathbf{f{:}O}_n \longrightarrow \mathbf{O}_n,\ x \mapsto ax, \text{ und } g{:}\ \mathbf{O}_n \longrightarrow \mathbf{O}_n,\ x \mapsto a^{-1}x,$$

deren Einschränkungen

$$\mathbf{SO}_n \longrightarrow \mathbf{O}_n - \mathbf{SO}_n,\ x \mapsto ax, \text{ und } \mathbf{O}_n - \mathbf{SO}_n \longrightarrow \mathbf{SO}_n,\ x \mapsto a^{-1}x,$$

wohldefiniert, also bijektive Isomorphismen sind. Insbesondere ist mit $\mathbf{SO}_n$ auch

$$f(\mathbf{SO}_n) = \mathbf{O}_n - \mathbf{SO}_n$$

eine irreduzible Komponente von $\mathbf{O}_n$ ist. Die Zerlegung von $\mathbf{O}_n$ in $\mathbf{SO}_n$ und sein Komplement ist gerade die Zerlegung in irreduzible Komponenten:

$$\mathbf{O}_n = \mathbf{SO}_n \cup \mathbf{O}_n - \mathbf{SO}_n = \mathbf{SO}_n \cup a{\bullet}\mathbf{SO}_n$$

Mit det(a) = -1 gilt auch $\det(a^{-1}) = -1$, also

$$a^{-1} \in \mathbf{O}_n - \mathbf{SO}_n.$$

Wegen

$$\begin{aligned} \mathbf{O}_n &= \mathbf{SO}_n \cup \mathbf{O}_n - \mathbf{SO}_n \\ &= a^{-1}{\bullet}(\mathbf{O}_n - \mathbf{SO}_n) \cup (\mathbf{O}_n - \mathbf{SO}_n) \end{aligned}$$

wird $\mathbf{O}_n$ von $\mathbf{O}_n - \mathbf{SO}_n$, d.h. die Gruppe $\mathbf{O}_n$ wird von der irreduziblen Varietät $\mathbf{O}_n - \mathbf{SO}_n$ erzeugt, ist aber selbst nicht zusammehängend ist.
QED.

2.2.9 Aufgabe 3
Seien G eine zusammenhängende F-Gruppe und n ≥ 2 ein natürliche Zahl. Dann ist die Untergruppe $G^{(n)}$, welche von den n-ten Potenzen der Elemente von g erzeugt wird, eine zusammenhängende F-Untergruppe, welche ein Normalteiler von G ist.
Beweis. Die Abbildung

$$G \longrightarrow G\times\ldots\times G = G^n \longrightarrow G,\ x \mapsto (x,\ldots,x) \mapsto x^n,$$

ist ein über F definierter Morphismus von F-Varietäten. Die vom Bild erzeugte Untergruppe $G^{(n)}$ ist nach 2.2.6 (iii) eine F-Untergruppe. Für beliebige x, g ∈ G gilt

$$g{\bullet}x^n{\bullet}g^{-1} = (g{\bullet}x{\bullet}g^{-1})^n \in G^{(n)}.$$

Die inneren Automorphismen von G bilden also ein Erzeugendensystem von $G^{(n)}$ in $G^{(n)}$ ab, also auch $G^{(n)}$ in $G^{(n)}$, d.h. $G^{(n)}$ ist ein Normalteiler.
QED.

2.2.9 Aufgabe 4
Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, daß die Aussage von 2.2.8 (i) im allgemeinen nicht richtig ist, wenn weder H noch K zusammenhängend sind. Hinweis: wählen sie für H und K endliche Gruppen).
Beweis. Sei

$$H \subseteq \mathbf{GL}_3$$

eine zur symmetrischen Gruppe S_3 isomorphe Untergruppe (bestehend aus Permutationsmatrizen). Es gilt

$$(12)\bullet(13) = (321)$$

also

$$\begin{aligned}(12)\bullet(13)\bullet(12)^{-1}\bullet(13)^{-1} &= (12)\bullet(13)\bullet(12)\bullet(13)\\ &= (321)^2\\ &= (123).\end{aligned}$$

Damit liegt (123) in (H, H). Dann liegt aber auch

$$(123)^2 = (321)$$

in (H, H). Mit H endlich ist auch (H, H) endlich. Weil (H, H) mindestens zwei Elemente enthält, ist (H, H) nicht zusammenhängend.
QED.

2.3 G-Räume

2.3.1 G-Varietäten und homogene Räume

Sei G eine algebraische Gruppe. Eine G-Varietät - auch G-Raum genannt - ist eine Varietät X zusammen mit einem Mophismus

$$a: G \times X \longrightarrow X, (g,x) \mapsto g\bullet x,$$

der eine Operation der Gruppe G auf der Menge X definiert, d.h. es soll gelten

$$g\bullet(h\bullet x) = (g\bullet h)\bullet x \text{ und } e\bullet x = x$$

für beliebige $g, h \in G$ und $x \in X$. Dabei soll e das Einselement der Gruppe G bezeichnen. Ein homogener Raum über G ist ein G-Raum X, auf welchem G transitiv operiert, d.h. für je zwei x', x" ∈ X gibt es ein $g \in G$ mit g•x' = x".

Seien X und Y zwei G-Räume. Ein Morphismus

$$\phi: X \longrightarrow Y$$

heißt äquivariant oder auch G-Morphismus, wenn

$$\phi(g\bullet x) = g\bullet\phi(x)$$

für beliebige $g \in G$ und $x \in X$ gilt.

Seien X ein G-Raum und $x \in X$ ein Punkt. Dann heißt

$$G_x := \{g \in G \mid g\bullet x = x\}$$

Isotropie-Gruppe von x und

$$G\bullet x := \{g\bullet x \mid g \in G\}$$

Orbit von x bezüglich der Operation von G.

Sei X ein G-Raum und F ein Teilkörper von k. Ist G eine F-Gruppe und X eine F-Varietät und ist die Operation

$$a: G \times X \longrightarrow X$$

von G auf X über F definiert, so heißt X auch G-Raum über F.

Bemerkung

Die Isotropie-Gruppe G_x ist eine abgeschlossene Untergruppe von G.

Beweis. G_x ist eine Untergruppe von G: Für beliebige $g', g'' \in G_x$ gilt

$$g'\bullet x = x \text{ und } g''\bullet x = x,$$

also auch

$$g'^{-1}x = x$$

und damit

$$\begin{aligned}(g'^{-1}\bullet g'')\bullet x &= g'^{-1}\bullet(g''\bullet x)\\ &= g'^{-1}\bullet x\\ &= x,\end{aligned}$$

also $g'^{-1}\bullet g'' \in G_x$.

G_x ist abgeschlossen in G:

Wir bezeichnen die Projektion auf den zweiten Faktor mit

$$p_2: G\times X \longrightarrow X, (g,x') \mapsto x'$$

Weil p_2 und die Operation a von G auf X Morphismen sind, also insbesondere stetige Abbildungen, sind die Urbilder $p_2^{-1}(x)$ und $a^{-1}(x)$ der abgeschlossenen Menge $\{x\}$ bei p_2 bzw. a abgeschlossen. Damit ist aber auch deren Durchschnitt abgeschlossen:

$$\begin{aligned}p_2^{-1}(x) \cap a^{-1}(x) &= \{(g,x) \mid g \in G\} \cap \{(g,x') \in G\times X \mid g\bullet x' = x\}\\ &= \{(g,x) \mid g \in G \text{ und } g\bullet x = x\}\\ &= G_x \times \{x\},\end{aligned}$$

d.h. $G_x\times\{x\}$ ist abgeschlossen in $G\times X$. Betrachten wir den Morphismus

$$(id, x):G \longrightarrow G\times X, g \mapsto (g,x),$$

dessen Koordinatenfunktionen (d.h. die Zusammensetzungen mit den beiden Projektionen von $G\times X$ auf G bzw. X) der identische Morphismus id: $G \longrightarrow G$ bzw. der konstante Morphismus $G \longrightarrow X$, $g \mapsto x$, ist, der alle Elemente von G auf den Punkt x abbildet. Weil die Abbildung (id,x) ein Morphismus ist - also eine stetige Abbildung - ist das Urbild

$$(id, x)^{-1}(G_x\times\{x\}) = G_x$$

der abgeschlossenen Teilmenge $G_x\times\{x\}$ bei diesem Morphismus ebenfalls abgeschlossen.

QED.

2.3.2 Beispiele

Beispiel 1

Seien G eine algebraische Gruppe und X := G. Dann operiert G auf sich selbst durch innere Automorphismen σ_g,

$$\sigma: G \times G \longrightarrow G, (g, x) \mapsto \sigma_g(x) := g\bullet x\bullet g^{-1}.$$

Die Orbits dieser Operation sind gerade die Konjugationsklassen

$$G\bullet x = \{ g\bullet x\bullet g^{-1} \mid g \in G \}$$

von G. Die Isotropie-Gruppen sind die Zentralisatoren

$$G_x = \{g \in G \mid g\bullet x = x\bullet g \}$$

der Elemente x von G.

Beispiel 2
Seien G eine algebraische Gruppe und X := G. Dann operiert G auf sich selbst durch Linkstranslationen L_g bzw. Rechtstranslationen R_g,

$$L: G \times G \longrightarrow G, (g, x) \mapsto L_g(x) := g\bullet x,$$

bzw.

$$R: G \times G \longrightarrow G, (g, x) \mapsto R_g(x) := x\bullet g^{-1}.$$

Dies sind zwei Beipiele für homogene Räume. Es sind sogar <u>prinzipale homogene Räume</u> (oder auch <u>Torseure</u>), bei denen die Isotropie-Gruppen trivial sind (d.h. die Operation ist <u>einfach-transitiv</u>[8]).

Beispiel 3
Sei V ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum. Eine <u>rationale Darstellung</u> von G in V ist ein Homomorphismus von algebraischen Gruppen

$$r = r_V: G \longrightarrow \mathbf{GL}(V)$$

(vgl. 2.1.5, Aufgabe 1). Wir können dann V als algebraische Varietät betrachten (welche isomorph ist zu $\mathbb{A}^n$ mit $n := \dim_k V$). Die Abbildung

$$G \times V \longrightarrow V, (g, v) \mapsto r(g)(v), \tag{1}$$

ist dann ein Morphismus von algebraischen Varietäten.[9] Wenn wir

$$g\bullet v := r(g)(v)$$

schreiben, so gilt für $g', g'' \in G$ und $v \in V$:

$$\begin{aligned} g'\bullet(g''\bullet v) &= r(g')(r(g'')(v)) \\ &= (r(g')\circ r(g''))(v) \\ &= r(g'\bullet g'')(v) && \text{(r ist Gruppen-Homomorphismus)} \\ &= (g'\bullet g'')\bullet v \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} e\bullet v &= r(e)(v) \\ &= Id(v) && \text{(r ist Gruppen-Homomorphismus)} \\ &= v. \end{aligned}$$

Mit anderen Worten, durch (1) bekommt V die Struktur einer G-Varietät. Wir sagen in dieser Situation auch, V ist durch (1) ein <u>G-Modul</u>.[10]

Die Operation (1) induziert eine Operation

---

[8] Für je zwei Punkte x', x" des Raums auf welchem operiert wird gibt es genau ein Element g der Gruppe mit $g\bullet x' = x''$.

[9] Verwendet man eine Basis des Vektorraums V, um diesen mit dem k^n zu identifizieren und **GL**(V) mit der Menge der umkehrbaren n×n-Matrizen mit Einträgen aus k, so ist r(g) eine n×n-Matrix, deren Einträge reguläre Funktionen von $g \in G$ sind. Die Koordinaten des Matrizen-Produkts

$$r(g)(v) = r(g)\bullet v \in k^n$$

sind homogene lineare Funktionen in den Einträgen der Matrix r(g) und den Koordinaten von v, also reguläre Funktionen auf G×V.

[10] Man kann die Operation (1) von G auf V linear fortsetzen zu einer Operation der Gruppen-Algeba über k von G auf V. Dadurch wird V ein Modul über dieser Gruppen-Algebra. Diese ist nicht zu verwechseln mit dem Koordinatenring k[G]. Es gibt jedoch Beziehungen im Fall G diagonalisierber, siehe 3.2.6.

$$a: G \times \mathbf{P}(V) \longrightarrow \mathbf{P}(V),\ (g, [v]) \mapsto [r(g)(v)] \qquad (2)$$

von G auf dem durch V definierten projektiven Raum (vgl. 1.7.2, Aufgabe 2): sind nämlich v', v" $\in$ V proportionale Vektoren, sagen wir

$$v'' = c\bullet v' \text{ mit } c \in k^*$$

so gilt dasselbe für deren Bilder bei r(g) (weil $r(g) \in \mathbf{GL}(v)$ eine lineare Abbildung ist),

$$r(g)(v'') = c\bullet r(g)(v').$$

Mit anderen Worten, wenn v' und v" denselben Punkt im projektiven Raum definieren, so gilt dasselbel auch für r(g)(v') und r(g)(v"):

$$[v'] = [v''] \Rightarrow [r(g)(v')] = [r(g)(v'')],$$

d.h. (2) ist korrekt definiert. Wir schreiben auch hier

$$g\bullet[v] := [r(g)(v)]) = [g\bullet v].$$

Mit (1) ist auch (2) eine Operation der Gruppe G auf der Menge **P**(V): für g',g" $\in$ G und $[v] \in \mathbf{P}(V)$ gilt:

$$\begin{aligned} g'\bullet(g''\bullet[v]) &= [g'\bullet(g''\bullet v)] \\ &= [(g'\bullet g'')\bullet v] \\ &= (g'\bullet g'')\bullet[v] \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} e\bullet[v] &= [e\bullet v] \\ &= [v]. \end{aligned}$$

Durch (2) bekommt der projektive Raum **P**(V) die Struktur einer G-Varietät.
Beweis. Es reicht zu zeigen, für jeden Punkt von G × **P**(V), sagen wir

$$(g_0, [v_0]) \in G \times \mathbf{P}(V),$$

gibt es affine offene Umgebungen

$$U \subseteq G\times\mathbf{P}(V),\ U'' \subseteq \mathbf{P}(V)$$

von g_0 , $[v_0]$ bzw. $[g_0v_0]$ mit

$$a(U\times U') \subseteq U''$$

derart, daß für $g \in U$ und $[v] \in U'$ die Koordinaten des Vektors [g•v] bezüglich irgendeines affinen Koordinatensystems reguläre Funktionen auf U×U' sind.
Nach den 1.7.2, Aufgabe 2, wird P(V) überdeckt durch offene Teilmengen der Gestalt

$$U_\ell := \{[x] \in \mathbb{P}(V) \mid \ell(x) \neq 0\},$$

wobei ℓ die Elemente des dualen Raums V* durchläuft. Dabei kann man U_ℓ mit der Hyperebene

$$H_\ell := \{x \in V \mid \ell(x) = 1\}$$

identifizieren vermittels

$$H_\ell \xrightarrow{\cong} U_\ell,\ x \mapsto [x].$$

Der Koordinatenring des affinen Raums $H_\ell = U_\ell$ besteht gerade aus den Polynomen von

$$k[\ell_1/\ell,\dots,\ell_{n-1}/\ell]$$

mit einer Basis $\ell, \ell_1,\dots,\ell_{n-1}$ von V. Wir können insbesondere ℓ so wählen, daß gilt

$$v_0 \in U_\ell.$$

Wir bezeichnen mit

$$e_0, e_1, \dots, e_{n-1} \in V$$

die Vektoren der zur Basis

$$\ell, \ell_1,\dots,\ell_{n-1} \in V^*$$

dualen Basis. Wir können dann die e_i als die Standard-Einheitsvektoren des mit dem k^n identifizierten Raums V ansehen. Die $\ell, \ell_1,\dots,\ell_{n-1}$ sind dann gerade die zugehörigen Koordinaten Funktionen, für die wir deshalb auch die Bezeichnungen

$$x_0 := \ell,\ x_1 := \ell_1,\dots,\ x_n := \ell_n$$

verwenden. Wie wir bereits gesehen haben, ist r(g)(v) ein n-Tupel, dessen Koordinaten reguläre Funktionen von $(g,v) \in G\times V$ sind und homogene lineare Funktionen in den Koordinaten $x_i(v)$ von

$$v = \begin{pmatrix} x_0(v) \\ \dots \\ x_{n-1}(v) \end{pmatrix}.$$

Weil $x_0 := \ell$ auf U_ℓ von 0 verschieden ist, ist damit

$$\frac{1}{x_0(v)}\bullet r(g)\begin{pmatrix} x_0(v) \\ \dots \\ x_{n-1}(v) \end{pmatrix} = r(g)\Bigl(\frac{1}{x_0(v)}\bullet\begin{pmatrix} x_0(v) \\ \dots \\ x_{n-1}(v) \end{pmatrix}\Bigr)$$

$$= r(g)\begin{pmatrix} 1 \\ x_1(v)/x_1(v) \\ \dots \\ x_{n-1}(v)/x_0(v) \end{pmatrix} \qquad (3)$$

ein Vektor, dessen Koordinaten reguläre Funktionen sind von

$$(g,v) \in G\times D(\ell) \text{ mit } D(\ell) = \{x \in V \mid \ell(x) \neq 0\}$$

Tatsächlich hängt dieser Vektor nur von Quotienten x_i/x_0 ab und ist damit wohldefiniert als Funktion von U_ℓ. Seine Koordinaten sind lineare Polynome in den x_i/x_0 , wobei die Koeffizienten reguläre Funktionen auf G sind (d.h. Elemente von k[G]). Die Koordinaten sind also Elemente von

$$k[G][x_0/x_0, x_1/x_0, \dots, x_{n-1}/x_0] = k[G]\otimes_k k[x_0/x_0, x_1/x_0, \dots x_{n-1}/x_0]$$
$$= k[G]\otimes_k k[U_\ell]$$
$$= k[G\times U_\ell]$$

Weil für jedes $g \in G$ die Matrix r(g) umkehrbar ist, hat der Vektor (3) für $(g, v) = (g_0, v_0)$ mindestens eine von Null veschiedene Koordinate. Insbesondere gibt es ein $\ell' \in V^*$ mit

$$\ell'(r(g_0)\bullet v_0) \neq 0,$$

und durch

$$f(g,v) := \ell'(r(g)\bullet v)$$

ist eine reguläre Funktion auf $G\times U_\ell$ definiert, welche in (g_0, v_0) von Null verschieden ist. Deshalb definiert f eine offene Hauptmenge

$$U := D(f) \subseteq G\times U_\ell$$

der affinen Varietät $G\times U_\ell$, welche den Punkt (g_0, v_0) enthält. Nach Definition von f gilt

$$\ell'(r(g)\bullet v) \neq 0 \text{ für } (g,v) \in D(f) = U,$$

d.h. $[r(g)\bullet v] \in U_{\ell'}$. Wir haben gezeigt, die Abbildung (2) induziert auf der offenen Umgebung D(f) des vorgegebenen Punktes $(g_0, v_0) \in G \times \mathbf{P}(V)$ eine reguläre Abbildung

$$D(f) \longrightarrow U_{\ell'}.$$

Da der Punkt $(g_0, v_0) \in G \times \mathbf{P}(V)$ beliebig vorgegeben war, ist damit (2) eine reguläre Abbildung und $\mathbf{P}(V)$ eine G-Varietät.
QED.

2.3.3 Lemma: Die Struktur der Orbits
Seien G eine algebraische Gruppe und X ein G-Varietät. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) Für jedes $x \in X$ ist das Orbit $G\bullet x$ eine offene Teilmenge seiner Abschließung.
(ii) Es gibt abgeschlossene Orbits.

Beweis. Zu (i). Die Zusammensetzung

$$G \xrightarrow{\cong} G\times\{x\} \hookrightarrow G\times X \longrightarrow X,\ g \mapsto (g,x) \mapsto g\bullet x,$$

ist ein Morphismus dessen Bild gerade das Orbit $G\bullet x$ ist. Nach 1.9.5 gibt es eine offene Teilmenge U von $\overline{G\bullet x}$, welche ganz in $G\bullet x$ liegt. Wegen

$$g\bullet G\bullet x \subseteq G\bullet x$$

gilt $g\bullet U \subseteq G\bullet x$ für jedes $g \in G$ also

$$\bigcup_{g\in G} g\bullet U \subseteq G\bullet x.$$

Weil G transitiv auf $G\bullet x$ operiert, ist sogar

$$\bigcup_{g\in G} g\bullet U = G\bullet x.$$

Mit U ist aber auch die Vereinigung links eine offene Teilmenge von $\overline{G\bullet x}$.

Zu (ii). Wegen (i) ist für jedes $x \in G$ die Menge

$$\overline{G\bullet x} - G\bullet x \qquad (1)$$

abgeschlossen in X. Weil je zwei Orbits identisch oder disjunkt sind, ist diese Differenz eine Vereinigung von Orbits.
Als Varietät ist X ein noetherscher Raum (vgl. 1.6.2, Aufgabe 1). In der Familie der abgeschlossenen Teilmengen der Gestalt (1) gibt es somit ein minimales Element (vgl. Bemerkung 1.1.5 (i)). Sei (1) ein solches. Wäre dieses minimale Element nicht leer, so könnte man es weiter verkleinern, indem man x durch ein Element aus dieser Differenz ersetzt, was der Wahl von (1) widerspricht. Es gilt also

$$\overline{G\bullet x} - G\bullet x = \emptyset,$$

d.h.

$$G\bullet x = \overline{G\bullet x}$$

QED.

Bemerkungen

(i) Auf Grund des Lemmas ist jedes Orbit $G\bullet x$ eine lokal abgeschlossene Teilmenge von X (d.h. der Durchschnitt einer offenen Teilmenge von X mit einer abgeschlossenen).

(ii) Die Orbits haben damit die Struktur einer algebraischen Varietät (vgl. 1.6.10 (4)).

(iii) Die Einschränkung der Operation $G \times X \longrightarrow X$ von G auf X auf ein Orbit definiert einen Morphismus

$$G \times G\bullet x \longrightarrow G\bullet x$$

von algebraischen Varietäten und gleichzeitig eine transitive Operation auf dem Orbit. Die Orbits werden so zu homogenen Räumen.

2.3.4 Aufgaben

Aufgabe 1

Sei G eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathbf{GL}_n$. Dann hat $\mathbb{A}^n$ die Struktur eines G-Raums. Bestimmen Sie die Orbits von $G = \mathbf{GL}_n$, $\mathbf{D}_n$ und $\mathbf{SL}_n$ (vgl. 2.1.4, Beispiele 3 und 4).

Beweis. Die Abbildung

$$G \times \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^n,\ (g, x) \mapsto g\bullet x,$$

ist ein Morphismus algebraischer Varietäten, denn die Einträge der Produkt-Matrix $g\bullet x$ sind Polynome der Einträge der $n\times n$-Matrix g und der Koordinaten des Vektors x. Damit hat $\mathbb{A}^n$ die Struktur eines G-Raum.

<u>Die Orbits im Fall</u> $G = \mathbf{GL}_n$. Es gibt zwei verschiedene Orbits, nämlich

$$G\bullet 0 = \{0\} \text{ und } G\bullet x = \mathbb{A}^n - \{0\}$$

(mit $x \in \mathbb{A}^n - \{0\}$ beliebig). Wir haben zu zeigen, daß das Gleichheitszeichen rechts tatsächlich gilt. Dazu reicht es zuzeigen, für jeden Vektor $x \in \mathbb{A}^n - \{0\}$, gibt es eine umkehrbare Matrix $g \in G$ mit

$$x = g\bullet e_1.$$

Dabei soll e_1 der erste Standard-Einheitsvektor sein. Wegen $x \neq 0$ gibt es eine Basis des k^n, sagen wir

$$k^n = k\bullet v_1 + \dots k\bullet v_n \text{ mit } v_1 = x.$$

Dann gibt es eine lineare Abbildung, welche den i-ten Standart-Einheitsvektor in v_i abbildet,

$$A\bullet e_i = v_i.$$

Weil bei dieser Abbildung eine Basis in eine Basis überführt wird, ist die Abbildung ein Isomorphismus. Die Matrix A ist umkehrbar, d.h.

$$A \in \mathbf{GL}_n,$$

und es gilt $x = v_1 = A\bullet e_1$, d.h. $g := A \in G$ ist das gesuchte Element von G.

<u>Die Orbits im Fall</u> $G = \mathbf{D}_n$. Seien $N = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$ und $\{g_i\}_{i=1,...,N}$ die Menge der Vektoren des k^n deren Koordinaten sämlich gleich 0 oder gleich 1 sind. Dann sind die Orbits

$$\mathbf{D}_n \bullet g_i \text{ , } i = 1,..., N,$$

paarweise verschiedenen, und jedes Orbit von $\mathbf{D}_n$ im k^n kommt unter ihnen vor.
Das liegt daran, daß die Matrizen von $\mathbf{D}_n$ die Gestalt

$$A = \mathrm{diag}(\lambda_1,..., \lambda_n)$$

haben mit $\lambda_i \in k\text{-}\{0\}$. Die Multiplikation eines Vektors x mit A multipliziert die i-te Koordinate von x mit λ_i , d.h. die i-te Koordinate von $A \bullet x$ ist genau dann gleich 0, wenn dies auch für die i-te Koordinate von x gilt. Die Orbits $\mathbf{D}_n \bullet g_i$ sind paarweise verschieden, weil in ihnen Vektoren liegen, deren Koordinaten an unterschiedlichen Stellen gleich 0 sind.
Durch geeignete Wahl von $A \in \mathbf{D}_n$ kann man erreichen, daß alle Koordinaten des Vektors $A \bullet x$ gleich 1 sind, für welche die entsprechende Koordinate von x ungleich 0 ist. Damit gibt es ein i mit

$$A \bullet x = g_i$$

also mit $x = A^{-1} g_i \in G \bullet g_i$. Es gibt also außer den angegebenen Orbits keine weiteren.
Das Orbit

$$G \bullet g_i$$

besteht aus allen Vektoren des k^n, die an denselben Stellen die Koordinate 0 haben wie g_i.
<u>Die Orbits im Fall</u> $G = \mathbf{SL}_n$.
Wir haben zwei Fälle zu unterscheiden.
<u>Im Fall</u> n = 1

gilt $\mathbf{SL}_n = \{e\}$, d.h. jedes Orbit besteht aus genau einem Element. Die Orbits von $\mathbf{SL}_n$ sind die einelementigen Teilmengen von k^n.
<u>Im Fall</u> n > 1 <u>hat</u> $\mathbf{SL}_n$ <u>dieselben Orbits wie</u> $\mathbf{GL}_n$:
Er reicht zu zeigen:

Jeder von 0 verschiedene Vektor des k^n liegt im selben Orbit wie e_1.

1. <u>Schritt</u>. e_1 und $c \bullet e_1$ liegen für jedes $c \in k\text{-}\{0\}$ im selben Orbit.
Sei

$$A = \mathrm{diag}(c, 1/c, 1, ... , 1)$$

die n×n-Diagonal-Matrix, deren Einträge auf der Hauptdiagonalen gleich 1 sind mit eventueller Ausnahme der ersten beiden Einträge c und 1/c. Dann gilt det A = 1, also

$$A \in \mathbf{SL}_n.$$

Außerdem ist $A\bullet e_1 = c\bullet e_1$. Damit liegen e_1 und $c\bullet e_1$ tatsächlich im selben Orbit.

2. Schritt. $x \in k^n - \{0\}$ liegt im selben Orbit wie e_1.

Zumindest gibt es ein $A \in \mathbf{GL}_n$ mit

$$x = A\bullet e_1$$

(siehe oben). Sei $c = \sqrt[n]{\det(A)}$ ein Element von k, dessen n-te Potenz gleich det(A) ist. Ein solches existiert, weil k algebraisch abgeschlossen ist. Dann gilt

$$\det(\frac{1}{c}\bullet A) = \frac{1}{c^n}\bullet\det(A) = 1,$$

d.h.

$$\frac{1}{c}\bullet A \in \mathbf{SL}_n.$$

Nach Wahl von A gilt außerdem

$$x = (\frac{1}{c}\bullet A)\bullet(c\bullet e_1)\ ,$$

d.h. x und $c\bullet e_1$ liegen im selben Orbit. Nach dem ersten Schritt liegen aber auch $c\bullet e_1$ und e_1 im selben Orbit, d.h. x und e_1 sind ebenfalls aus demselben Orbit.

QED.

Aufgabe 2

Es gibt eine Operation von $G = \mathbf{GL}_2$ auf der projektiven Geraden $\mathbb{P}^1$ (vgl. 2.3.2, Beispiel 3), durch welche $\mathbb{P}^1$ zu einem homogenen G-Raum wird. Beschreiben Sie die Isotropie-Gruppe eines Punktes.

Bei der diagonalen Operation von G auf $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ treten zwei Orbits auf.

Beweis. Homogenität von $\mathbb{P}^1$: Für jedes $v \in k^2$ gibt es eine Matrix $A \in \mathbf{GL}_2$ mit

$$v = A\bullet e_1$$

(siehe Aufgabe 1). Für die durch $\mathbf{GL}_2$ auf $\mathbb{P}(k^2) = \mathbb{P}^1$ induzierte Operaton gilt damit (vgl. Beispiel 3 von 2.3.2)

$$A\bullet[e_1] = [A\bullet e_1] = [v]$$

Damit liegen [v] und $[e_1]$ im selben Orbit. Dann liegen aber auch [v'] und [v''] im selben Orbit für je zwei $v', v'' \in k^2 - \{0\}$.

Die Isotropie-Gruppe in $\mathbf{GL}_n$ von $[v] \in \mathbb{P}^n$.

Für $g \in \mathbf{GL}_n$ gilt:

$$g\bullet[v] = [v] \Leftrightarrow g\bullet v = c\bullet v \text{ für ein } c \in k^* \Leftrightarrow g \text{ hat den Eigenvektor } v.$$

Die Isotropie-Gruppe von [v] besteht gerade aus den Matrizen von $\mathbf{GL}_n$ mit dem Eigenvektor v.

Die Orbits der diagonalen Operation.

Zwei Orbits

$$G\bullet([v_1], [v_2]) \text{ und } G\bullet([w_1], [w_1])$$

bezüglich der diagonalen Operation der

$$\mathbf{GL}_2 \times (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \longrightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1,\ (g, (p_1, p_2)) \mapsto (g \cdot p_1, g \cdot p_2),$$

sind genau dann gleich wenn eine der beide folgenden Bedingungen erfüllt sind.
1. v_1, v_2 sind linear unabhängig und w_1, w_2 sind linear unabhängig.
2. v_1, v_2 sind linear abhängig und w_1, w_2 sind linear abhängig.
Den Beweis unterteilen wir in drei Schritte.
<u>1. Schritt:</u> Aus Bedingung 1 folgt die Gleichheit der Orbits.
Beide Vektorpaare bilden eine Basis des k^2. Es gibt einen Automorphismus Isomorphismu

$$f: k^2 \longrightarrow k^2 \text{ mit } f(v_i) = w_i \text{ für } i = 1,2.$$

Für die Matrix A von f gilt

$$A \bullet v_i = A \bullet w_i \text{ für } i = 1,3 \text{ und } A \in \mathbf{GL}_2.$$

Damit ist aber

$$A \bullet ([v_1], [v_2]) = ([A \bullet v_1], [A \bullet v_2]) = ([w_1], [w_2]),$$

d.h. $([v_1], [v_2])$ und $([w_1], [w_2])$ liegen im selben Orbit.
<u>2. Schritt:</u> Aus Bedinung 2 folgt die Gleichheit der Orbits.
Auf Grund des ersten Teils des Beweises gibt es eine Matrix $A \in GL_2$ mit $A \bullet v_1 = w_1$.
Deshalb gilt

$$\begin{aligned} A \bullet ([v_1], [v_2]) &= A \bullet ([v_1], [v_1]) && \text{(die } v_i \text{ sind proportional)} \\ &= ([A \bullet v_1], [A \bullet v_1]) \\ &= ([w_1], [w_1]) \\ &= ([w_1], [w_2]) && \text{(die } w_i \text{ sind proportional)} \end{aligned}$$

d.h. $([v_1], [v_2])$ und $([w_1], [w_2])$ liegen im selben Orbit.

<u>3. Schritt:</u> Seien $([v_1], [v_2])$ und $([w_1], [w_2])$ aus selben Orbit. Dann sind die v_i genau dann linear unabhängig, wenn die w_i es sind.
Nach Voraussetzung gibt es ein umkehrbare Matrix A mit

$$([A \bullet v_1], [A \bullet v_2]) = ([w_1], [w_2]).$$

Es folgt

$$A \bullet v_i = c_i w_i \text{ mit } c_i \in k - \{0\}.$$

Bezeichne (u, v) die Matrix mit den Spalten u und v. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \det(w_1, w_2) &= (c_1 \bullet c_2)^{-1} \bullet \det(c_1 \bullet w_1, c_2 \bullet w_2) \\ &= (c_1 \bullet c_2)^{-1} \bullet \det(A \bullet v_1, A \bullet v_2) \\ &= (c_1 \bullet c_2)^{-1} \bullet \det(A) \bullet \det(v_1, v_2). \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\det(w_1, w_2) \neq 0 \Leftrightarrow \det(v_1, v_2) \neq 0$$

QED.

Aufgabe 3
Verallgemeinern Sie das Ergebnis von Aufgabe 2 auf den Fall der Operation von

$$G := \mathbf{GL}_n$$

auf dem $\mathbb{P}^{n-1}$.

<u>Die Verallgemeinerung</u>.
Wir setzen

$G := \mathbf{GL}_n$

$X := \mathbb{P}(k^n) = \mathbb{P}^{n-1}$

$X^2 := X\times X$

Weiter sei

$G \times V \longrightarrow V, (g, [v]) \mapsto [g\bullet v]$

die Operation von 2.3.2 Beispiel 2.
Dann gelten die folgenden Aussagen.

1. Die Operation

$$G \times X \longrightarrow X, (g, [v]) \mapsto [g\bullet v],$$

ist transitiv, d.h. es gibt nur die Orbits k^n - {0} und {0}.

1. Die diagonale Operation

$$G \times X^2 \longrightarrow X^2, (g, [v_1], [v_2]) \mapsto ([g\bullet v_1], [g\bullet v_2])$$

ist nicht transitiv

Beweis. <u>Zu Aussage 1</u>. Die Argumentation ist dieselbe wie bei Aufgabe 2. Für jedes v $\in k^n$ - {0} gibt es eine Matrix $A \in \mathbf{GL}_2$ mit

$$v = A\bullet e_1$$

(siehe Aufgabe 1). Für die durch $\mathbf{GL}_n$ auf $\mathbb{P}(k^n) = \mathbb{P}^{n-1}$ induzierte Operaton gilt damit (Beispiel 3 von 2.3.2)

$$A\bullet[e_1] = [A\bullet e_1] = [v]$$

Damit liegen [v] und $[e_1]$ im selben Orbit. Dann liegen aber auch [v'] und [v''] im selben Orbit für je zwei v', v'' $\in k^n$ - {0}.
<u>Zu Aussage 2</u>. Die Argumentation ist dieselbe wie bei Aufgabe 2.
QED.

2.3.5 Vereinbarungen und Bezeichnungen

Von jetzt an seien G eine lineare algebraische Gruppe und X ein affiner G-Raum mit der Operation

$$a: G\times X \longrightarrow X.$$

Wir haben dann

$$k[G\times X] = k[G]\otimes_k k[X]$$

und a ist durch einen k-Algebra-Homomorphismus

$$a^*: k[X] \longrightarrow k[G]\otimes_k k[X]$$

gegeben (vgl. Bemerkung 1.4.7(vi)).
Für $g \in G$, $x \in X$, $f \in k[X]$ setzen wir

$$((s(g))(f))(x) := f(a(g^{-1}, x)).$$

Dann ist

$$s(g): k[X] \longrightarrow k[X]$$

ein Isomorphismus von k-Algebren und damit eine umkehrbare k-lineare Abbildung des im allgemeinen nicht endlich-dimensionalen k-Vektorraums k[X] und definiert so einen Homomorphismus abstrakter Gruppen

$$s{:}G \longrightarrow \mathbf{GL}(k[X]).$$

Aus dem nachfolgenden Ergebnis folgt, daß sich die zugehörige Darstellung

$$G \times k[X] \longrightarrow k[X],\ (g, f) \mapsto s(g)(f)$$

aus rationalen Darstellungen von G zusammensetzt (vgl. 2.3.9, Aufgabe 1).

Bemerkung

(i) Die durch s definierte Abbildung

$$G \times k[X] \longrightarrow k[X],\ (g, f) \mapsto s(g)(f),$$

ist tatsächlich eine Operation der Gruppe G auf der Menge k[X], d.h. es gilt

$$s(e) = \mathrm{Id} \quad \text{und}$$
$$s(g')\circ s(g'') = s(g'\bullet g'') \qquad \text{für } g',g'' \in G.$$

(ii) G operiert auf k[X] durch k-lineare Automorphismen, d.h. es gilt

$$s(g)(c'\bullet f' + c''\bullet f'') = c'\bullet s(g)(f') + c''\bullet s(g)(f'') \text{ für } g\in G,\ c',c''\in k,\ f',f''\in k[X].$$

Beweis der Bemerkungen. Zu (i). Nach Definition von s(g) ist

$$(s(g))(f)(x) = f(a(g^{-1},x)). \qquad (1)$$

Ist g = e des Einselement der Gruppe, so folgt s(e)(f)(x) = f(x), also s(e)(f) = f, also

$$s(e) = \mathrm{Id}.$$

Damit besteht die erste Identität. Zum Beweis der zweiten setzen wir in (1) für f die Funktion s(g')(f) ein und erhalten

$$\begin{aligned} s(g)(s(g')(f))(x) &= (s(g')(f))(a(g^{-1},x)) \\ &= (s(g')(f))(x') && \text{mit } x' := a(g^{-1},x) \\ &= f(a(g'^{-1},x')) && \text{(nach (1))} \\ &= f(a(g'^{-1},a(g^{-1},x))) && \text{(nach Definition von } x'\text{)} \\ &= f(a(g\bullet g')^{-1},x)) && \text{(a ist eine Operation von G auf X)} \\ &= (s(g\bullet g'))(f)(x) && \text{(nach (1)).} \end{aligned}$$

Da dies für jedes $x \in X$ gilt, folgt

$$(s(g)\circ s(g'))(f) = s(g\bullet g')(f).$$

Da dies für jedes $f \in k[X]$ gilt, erhalten wir

$$s(g)\circ s(g') = s(g\bullet g').$$

Zu (ii). Aus (1) mit f = c'•f' + c''•f'' erhalten wir

$$\begin{aligned} (s(g))(c'\bullet f' + c''\bullet f'')(x) &= (c'\bullet f' + c''\bullet f'')(g^{-1}x) \\ &= c'\bullet f'(g^{-1}x) + c''\bullet f''(g^{-1}x) \\ &= c'\bullet s(g)(f')(x) + c''\bullet s(g)(f'')(x) \\ &= (c'\bullet s(g)(f') + c''\bullet s(g)(f''))(x) \end{aligned}$$

Da dies für jedes $x \in X$ gilt, folgt

$$(s(g))(c'\bullet f' + c''\bullet f'')(x) = c'\bullet s(g)(f') + c''\bullet s(g)(f'')$$

QED.

2.3.6 Lokale Endlichkeit der Operation von G auf k[X]

2.3.6 A. Die lokale Endlidchkeit

Seien G eine lineare algebraische Gruppe, X eine affine G-Varietät mit der Operation

$$a: G \times X \longrightarrow X$$

und

$$V \subseteq k[X]$$

ein endlich-dimensionaler k-linearer Unterraum. Weiter sei

$$s: G \longrightarrow \mathrm{Aut}_k(k[X]),\ g \mapsto s(g),$$

die in 2.3.5 definierte Operation der abstrakten Gruppe G auf k[X] mit

$$((s(g))(f))(x) := f(a(g^{-1}, x))$$

für $g \in G$, $x \in X$ und $f \in k[X]$. Dann gelten folgende Aussagen.

(i) Es gibt einen endlich-dimensionalen k-linearen Unterraum $W \subseteq k[X]$

$$V \subseteq W,$$

welcher G-<u>stabil ist bezüglich</u> s, d.h. es gilt

$$s(g)(k[X]) \subseteq k[X] \text{ für jedes } g \in G.$$

(ii) Die folgenden beiden Bedingungen an den endlich-dimensionalen linearen Unterraum $V \subseteq k[X]$ sind äquivalent.

1. $s(g)(V) \subseteq V$ für jedes $g \in G$.
2. $a^*(V) \subseteq k[G]\otimes_k V$

Sind diese Bedingungen erfüllt, so ist die Abbildung

$$s_V: G \longrightarrow \mathbf{GL}(V),\ g \mapsto s(g)|_V,$$

wohldefiniert und eine rationale Darstellung von G in V (vgl. 2.3.2 Beispiel 3).

(iii) Seien außerdem G eine F-Gruppe, X eine F-Varietät, V ein über F definierter k-linearer Unterraum von k[X] (vgl. 1.3.7, F-Strukturen) und

$$a: G \times X \longrightarrow X$$

ein über F definierter Morphismus. Dann kann man in (i) für W einen über F definierten k-linearen Unterraum von k[X] wählen.

Beweis. <u>Zu (i)</u>. Als endlich-dimensionaler Raum ist V die Summe von endlich vielen eindimensionalen linearen Unterräumen. Es reicht, für jeden dieser Summanden ein W zu konstruieren und dann die Summe der gefundenen endlich vielen W zu nehmen. Wir könnena also annehmen,

$$V = k\cdot f \text{ mit } f \neq 0$$

(im Fall f = 0 können wir W = V setzen). Sei

$$f\circ a = a^*(f) = \sum_{i=1}^{n} u_i \otimes f_i \text{ mit } u_i \in k[G] \text{ und } f_i \in k[X].$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}(s(g)(f))(x) &= f(a(g^{-1},x))\\ &= (\sum_{i=1}^{n} u_i\otimes f_i)(g^{-1}, x)\\ &= \sum_{i=1}^{n} u_i(g^{-1})\cdot f_i(x)\end{aligned}$$

d.h.

$$s(g)(f) \quad = \sum_{i=1}^{n} u_i(g^{-1})\cdot f_i.$$

Alle Funktionen s(g)(f) liegen im endlich-dimensionalen linearen Unterraum W' von k[X], welcher von den endlich vielen f_i erzeugt wird. Der von den (möglicherweise unendlich vielen)

$$s(g)(f) \text{ mit } g \in G$$

erzeugte k-Vektorraum

$$W := \sum_{g\in G} k\cdot s(g)f$$

liegt ganz in W' und ist damit auch endlich-dimensioinal. Wegen

$$s(e)(f)(x) = f(x)$$

liegt f in W, d.h. es ist

$$V = k\cdot f \subseteq W.$$

Für g' ∈ G gilt

$$\begin{aligned} s(g')(W) &= s(g')(\sum_{g\in G} k\cdot s(g)) \\ &= \sum_{g\in G} k\cdot s(g')(s(g)f) && \text{(nach Bemerkung 2.3.5(ii))} \\ &= \sum_{g\in G} k\cdot (s(g'\cdot g)f) && \text{(nach Bemerkung 2.3.5(i))} \\ &= \sum_{g\in G} k\cdot s(g)f && \text{(G ist eine Gruppe)} \\ &= W \end{aligned}$$

Damit ist W stabil unten den Automorphismen s(g') mit g'∈G.

Zu (ii). 1. Schritt. 2 ⇒ 1.
Nehmen wir also an, es gilt

$$a^*(V) \subseteq k[G]\otimes V.$$

Für jedes f ∈ V gilt dann

$$f\circ a = a^*(f) = \sum_{i=1}^{n} u_i\otimes f_i \text{ mit } u_i \in k[G] \text{ und } f_i \in V.$$

und die Rechnung am Anfang des Beweises von (i) zeigt, für jedes g ∈ G ist

$$s(g)(f) \quad = \sum_{i=1}^{n} u_i(g^{-1})\cdot f_i \in V,$$

also

$$s(g)(V) \subseteq V.$$

2. Schritt. 1 ⇒ 2.
Sei

$\{f_1,...,f_r\}$ eine k-Vektorraumbasis von V.

Wir ergänzen diese Basis zu einer k-Vektorraumbasis von k[X], sagen wir

$\{f_1,...,f_r\} \cup \{g_j\}_{j\in J}$ ist eine k-Vektorraumbasis von V.

Diese Basis definiert dann eine Zerlegung von k[X] in eine direkte Summe

$$k[X] = V \oplus \sum_{j\in J} k\cdot g_j$$

Für $f \in V$ schreiben wir

$$a^*(f) = \sum_{i=1}^{r} u_i \otimes f_i + \sum_{j\in J} v_j \otimes g_j \text{ mit } u_i, v_j \in k[G].$$

Die Rechnung am Anfang im Beweis von (i) zeigt

$$s(g)(f) = \sum_{i=1}^{r} u_i(g^{-1})\cdot f_i + \sum_{j\in J} v_j(g^{-1})\cdot g_j.$$

Weil s(g)(f) nach Voraussetzung 1 im direkten Summanden V von k[X] liegt, folgt

$$v_j(g^{-1}) = 0 \text{ für jedes } j \in J \text{ und jedes } g \in G,$$

d.h. die Funktionen $v_j \in k[G]$ sind Null. Es folgt

$$a^*(f) = \sum_{i=1}^{r} u_i \otimes f_i .$$

Weil die f_i eine Basis von V bilden und die u_i in k[G] liegen, folgt

$$a^*(f) \in k[G]\otimes_k V.$$

Da dies für jedes $f \in V$ gilt, ist Bedingung 2 erfüllt.

3. <u>Schritt</u>. Die Abbildung

$$s_V: G \longrightarrow \mathbf{GL}(V),\ g \mapsto s(g)|_V ,$$

ist wohldefiniert und eine rationale Darstellung von G in V (d.h. ein Homomorphismus algebraischer Gruppen - vgl. 2.3.2, Beispiel 3) falls $a^*(V) \subseteq k[G]\otimes_k V$ gilt.

Sei eine Basis des k-Vektorraums V gegeben, sagen wir

$$V = \sum_{i=1}^{s} k\cdot f_i \quad (\subseteq k[X])$$

Wegen $a^*(V) \subseteq k[G]\otimes_k V$ gibt es $m_{ij} \in k[G]$ mit

$$a^*(f_i) = \sum_{\alpha=1}^{s} m_{\alpha i}\otimes f_\alpha \quad \text{für } i = 1,..., s,$$

also

$$\begin{aligned}(s(g)(f_i))(x) &= f_i(a(g^{-1}, x))\\ &= a^*(f_i)(g^{-1}, x)\\ &= \sum_{\alpha=1}^{s} m_{\alpha i}(g^{-1})\cdot f_\alpha(x)\end{aligned}$$

also

$$s(g)(f_i) = \sum_{\alpha=1}^{s} m_{\alpha i}(g^{-1})\cdot f_\alpha$$

Bezüglich der Basis der f_i von V hat damit die Abbildung

$$s(g)|_V : V \longrightarrow V$$

die Matrix $(m_{ij}(g^{-1}))$. Wegen $m_{ij} \in k[G]$ sind die Einträge der Matrix reguläre Funktionen auf G. Deshalb ist die Abbildung

$$s_V: G \longrightarrow \mathrm{End}_k(V)\ (\cong M_s \cong \mathbb{A}^s)$$

ein Morphismus von affinen Varietäten.
Nach den Bemerkungen 2.3.5 (i) und (ii) besteht das Bild von s_V aus umkehrbaren k-linearen Abbildungen, so daß wir s_V als Morphismus

$$s_V: G \longrightarrow \mathbf{GL}(V)$$

ansehen können. Auf Grund derselben Bemerkungen ist dann s_V ein Gruppen-Homomorphismus, d.h. ein Homomorphismus algebraischer Gruppen (ein rationale Darstellung).
Zu (iii). Unter den angegebenen Bedingungen lassen sich die Kontruktionen im Beweis des ersten Schritt mit F anstelle von k und den entsprechenden F-Vektorräumen und F-Algebren (d.h. den zugehörigen F-Strukturen) wiederholen. Tensoriert man dieses Konstruktionen mit k über F, so erhält man die alten Konstruktionen des ersten Schritts, und damit die Behauptung.
QED.

2.3.6 B Der Fall von Links- und Rechtstranslationen

Betrachten wir die Spezialfälle, in denen die lineare algebraische Gruppe G durch Linkstranslationen oder Rechtstranslationen auf sich selbst operiert (vgl. Beispiel 2 von 2.3.2),

$$\lambda: G \times k[G] \longrightarrow k[G],\ (g, f) \mapsto \lambda(g)f = L^*_{g^{-1}}(f),$$

d.h.

$$(\lambda(g)f)(x) = f(g^{-1}\cdot x) \text{ für } g, x \in G \text{ und } f \in k[G],$$

und

$$\rho: G \times k[G] \longrightarrow k[G],\ (g, f) \mapsto \rho(g)f = R^*_{g^{-1}}(f),$$

d.h.

$$(\rho(g)f)(x) = f(xg) \text{ für } g, x \in G \text{ und } f \in k[G],$$

Die Abbildungen λ und ρ sind Darstellungen der abstrakten Gruppe G in GL(k[G]) und sogar in der Gruppe der k-Algebra-Automorphismen des Koordinatenrings k[G]. Ist

$$\iota := i^*: k[G] \longrightarrow k[G],\ f \mapsto f(x^{-1})$$

der Automorphismus von k[G], welcher durch den Übergang zum Inversen induziert wird (der Antipode), so gilt

$$\rho(g) = \iota\circ\lambda(g)\circ\iota^{-1} \text{ für jedes } g \in G. \qquad (1)$$

Beide Darstellungen sind treu, d.h. ihr Kern ist trivial, d.h.

$$\mathrm{Ker}(G\longrightarrow \mathrm{Aut}_k\, k[G],\ g \mapsto \lambda(g)) = \{e\} = \mathrm{Ker}(G\longrightarrow \mathrm{Aut}_k\, k[G],\ g \mapsto \rho(g))$$

Beweis.
Zur Identität (1). Es gilt

$$R_g(x) = x\bullet g^{-1} = (g\bullet x^{-1})^{-1} = i(L_g(x^{-1})) = (i\circ L_g\circ i)(x)$$

also

$$R_g = i\circ L_g\circ i$$

also

$$\begin{aligned}\rho(g) &= R^*_{g^{-1}}\\ &= (i\circ L_{g^{-1}}\circ i)^*\\ &= i^*\circ L^*_{g^{-1}}\circ i^*\\ &= \iota\circ\lambda(g)\circ\iota\end{aligned}$$

Weil i selbstinvers ist und $f \mapsto f^*$ ein Funktor, ist auch ι selbstinvers, d.h. es gilt

$$\rho(g) = \iota\circ\lambda(g)\circ\iota^{-1}.$$

Der Kern von λ ist trivial. Mit $L^*_{g^{-1}} = Id$ gilt $f(g^{-1}x) = f(x)$ für jedes $x \in G$ und jedes $f \in k[X]$. Damit haben die Punkte $g^{-1}x$ und x dieselben Koordinaten (im k^n, welcher die Gruppe G anthält), d.h. es ist

$$g^{-1}x = x \text{ für jedes } x \in G,$$

Insbesondere für $x = e$ erhalten wir $g^{-1} = e$, also $g = e$.

Der Kern von ρ ist trivial. Mit $R^*_{g^{-1}} = Id$ gilt $f(xg) = f(x)$ für jedes $x \in G$ und jedes $f \in k[X]$. Damit haben die Punkte xg und x dieselben Koordinaten (im k^n, welcher die Gruppe G anthält), d.h. es ist

$$xg = x \text{ für jedes } x \in G,$$

Insbesondere für $x = e$ erhalten wir $g = e$.
QED.

2.3.7 Einbettung einer linearen algebraischen Gruppe in eine GL_n

Sei G eine lineare algebraische Gruppe. Dann gelten folgende Aussagen.

(i) Es gibt eine natürliche Zahl n und einen Isomorphismus von G mit einer abgeschlossenen Untergruppe von $\mathbf{GL}_n$.

(ii) Ist G eine F-Gruppe, so kann man den Isomorphismus von (i) so wählen, daß er über F definiert ist.

Beweis. Zu (i).

1. Schritt. Konstruktion eines Homomorphismus ϕ affiner algebraischer Gruppen.
Wir betrachten die Operation von G auf sich selbst durch Rechtstranslationen,

$$a = R\colon G \times G \longrightarrow G, (g, x) \mapsto R_g(x) = xg^{-1}.$$

Als affine k-Algebra besitzt k[G] ein endliches Erzeugendensystem. Nach 2.3.6 (i) liegen die endlich vielen Elemente eines solchen Erzeugendensystems in einen G-stabilen endlich-dimensionalen k-linearen Unterraum von k[G]. Eine Basis dieses Unterraums ist ebenfalls ein Erzeugendensystem der k-Algebra k[G]. Damit hat k[G] die Gestalt

$$k[G] = k[f_1,..., f_n],$$

wobei die f_i die Basis eines k-linearen Unteraums

$$V = k\bullet f_1 + ... + k\bullet f_n \text{ , } \dim_k V = n,$$

von k[G] bilden mit

$$s(g)(V) \subseteq V \text{ für jedes } g \in G.$$

Nach 2.3.6 A (ii) gilt $a^*(V) \subseteq k[G]\otimes_k V$, also (nach 2.3.6 A (ii))

$$s(g)f_i(x) = f_i(a(g^{-1}, x)) = f_i(xg) = \sum_{j=1}^{n} m_{ji}(g)\otimes f_j(x) \text{ mit } m_{ij} \in k[G].$$

also

$$s(g)f_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ji}(g)\bullet f_j. \qquad (1)$$

Weil die f_j linear unabhängig sind, sind die Funktionen m_{ij} als Funktionen $G \longrightarrow k$ durch diese Relation eindeutig bestimmt. Nach Bemerkung 2.3.5 (i) g(e) = Id und (1) bekommt für diesen Fall die Gestalt

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ji}(e)\bullet f_j.$$

Deshalb gilt

$$m_{ij}(e) = \delta_{ij} \text{ für } i,j = 1,...,n. \qquad (2)$$

Weil die m_{ij} in k[G] liegen, ist die Abbildung

$$\phi: G \longrightarrow \mathbf{M}_n = \mathbb{A}^{n^2}, g \mapsto (m_{ij}(g))_{i,j=1,...,n} \text{ ,}$$

ein Morphismus affiner algebraischer Varietäten.
Nach Bemerkung 2.3.5 (i), angewandt auf die Operation

$$s: G \times k[G] \longrightarrow k[G], (x, f) \mapsto R^*_{g^{-1}}(f) = f(xg)$$

durch Rechtstranslationen (vgl. zweiter Teil von 2.3.6), gilt

$$s(g'\bullet g'') = s(g')\circ s(g'') \text{ für beliebige } g', g'' \in G.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} s(g'\bullet g'')f_i &= s(g')(s(g'')f_i) \\ &= s(g')\Big(\sum_{\alpha=1}^{n} m_{\alpha i}(g'')\bullet f_\alpha\Big) && \text{(nach (1))} \\ &= \sum_{\alpha=1}^{n} m_{\alpha i}(g'')\bullet s(g')(f_\alpha) && \text{(s(g') ist linear nach Bem. 2.3.5(ii))} \\ &= \sum_{\alpha=1}^{n} m_{\alpha i}(g'')\bullet\Big(\sum_{j=1}^{n} m_{j\alpha}(g')\bullet f_j\Big) && \text{(nach (1))} \\ &= \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{\alpha=1}^{n} m_{j\alpha}(g')\bullet m_{\alpha i}(g'')\Big)\bullet f_j \end{aligned}$$

Wir vergleich mit (1) für $g = g'\bullet g''$ und erhalten

$$m_{ji}(g'\bullet g'') = \sum_{\alpha=1}^{n} m_{j\alpha}(g')\bullet m_{\alpha i}(g'') \text{ für } i,j = 1,...,n$$

also

$$m_{ij}(g'\cdot g'') = \sum_{\alpha=1}^{n} m_{i\alpha}(g')\cdot m_{\alpha j}(g'') \text{ für } i,j = 1,...,n$$

also

$$\begin{aligned}\phi(g'\cdot g'') &= \begin{pmatrix} m_{11}(g'\cdot g'') & \dots & m_{1n}(g'\cdot g'') \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{n1}(g'\cdot g'') & \dots & m_{nn}(g'\cdot g'') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m_{11}(g') & \dots & m_{1n}(g') \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{n1}(g') & \dots & m_{nn}(g') \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_{11}(g'') & \dots & m_{1n}(g'') \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{n1}(g'') & \dots & m_{nn}(g'') \end{pmatrix} \\ &= \phi(g')\cdot\phi(g'') \qquad \text{(Matrizen-Multiplikation)}\end{aligned}$$

Speziell für $g'' = g'^{-1}$ ergibt sich

$$\phi(g')\cdot\phi(g'^{-1}) = \phi(e)$$

Wegen (2) steht rechts die Einheitsmatirx, die Matrizen der Gestalt $\phi(g)$ sind umkehrbar. Wir können ϕ als Morphismus affiner algebraischer Varietäten

$$\phi: G \longrightarrow \mathbf{GL}_n,\ g \mapsto (m_{ij}(g))_{ij=1,...,n},$$

auffassen, und - wie wir gerade gesehen haben - ist ϕ auch ein Homomorphismus von Gruppen.

2. Schritt. ϕ ist injektiv.

Für $g \in \mathrm{Ker}(\phi)$, d.h. $\phi(g)$ ist die Einheitsmatrix, gilt $m_{ij}(g) = \delta_{ij}$ für alle i und j, also nach (1)

$$\begin{aligned} s(g)f_i &= \sum_{j=1}^{n} m_{ji}(g)\cdot f_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \delta_{ji}\cdot f_j \\ &= f_i \end{aligned} \tag{3}$$

für i = 1,..., n. Weil $s(g)$: $k[G] \longrightarrow k[G]$, $f(x) \mapsto f(xg)$, ein k-Algebra-Homomorphismus ist (nach 2.3.5) und

$$k[G] = k[f_1,..., f_n]$$

als k-Algebra von den f_i erzeugt wird, ist $s(g)$ mit (3) die identische Abbildung von $k[G]$,

$$s(g) = \mathrm{Id} \text{ für } g\in \mathrm{Ker}(\phi),$$

d.h. es gilt $f(xg) = f(x)$ für jedes $f \in k[G]$ und jedes $x \in G$. Dies ist insbesondere für $x = e$ der Fall, d.h. $f(g) = f(e)$ für jedes $f \in k[G]$. Die Punkte g und e von G haben dieselben Koordinaten, sind also gleich, $g = e$. Der Kern von ϕ ist trivial, und ϕ ist injektiv.

3. Schritt. Beweis der Behauptung.

Wir verwenden die Bezeichnungen von 2.1.4, Beispiel 3. Der durch

$$\phi: G \longrightarrow \mathbf{GL}_n$$

induzierte k-Algebra-Homomorphismus der Koordinatenringe

$$\phi^*: k[T_{ij}, \det(T_{ij}) \mid i,j=1,\ldots, n] \longrightarrow k[G]$$

ist gegeben durch

$$\phi^*(T_{ij}) = T_{ij}\circ\phi = m_{ij} \text{ für } i,j = 1,\ldots, n \text{ und}$$

$$\phi^*(\det(T_{ij})) = \det(\phi^*(T_{ij})) = \det(m_{ij}).$$

Insbesondere liegen die m_{ij} im Bild von ϕ^*,

$$m_{ij} \in \mathrm{Im}(\phi^*).$$

Aus (1) erhalten wir

$$f_i(xg) = s(g)f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} m_{ji}(g)\cdot f_j(x) \quad \text{für beliebige } g,x \in G$$

also speziell für x = e:

$$f(g) = \sum_{j=1}^{n} m_{ji}(g)\cdot f_j(e),$$

d.h.

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ji}\cdot f_j(e).$$

Die Funktion f_i ist eine Linearkombination der $m_{ji} \in \mathrm{Im}(\phi^*)$ mit Koeffizienten $f_j(e)\in k$, liegt also auch in $\mathrm{Im}(\phi^*)$. Das Bild von

$$\phi^*: k[\mathbf{GL}_n] \longrightarrow k[G]$$

enthält das Erzeugendensystem $\{f_i\}$ der k-Algebra k[G], d.h.

$$\phi^*: k[\mathbf{GL}_n] \twoheadrightarrow k[G]$$

ist surjektiv. Nach 2.2.5 (ii) ist $\phi(G)$ eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathbf{GL}_n$. Die reguläre Abbildung ϕ ist deshalb die Zusammensetzung

$$\phi: G \xrightarrow{\varphi} \phi(G) \overset{i}{\hookrightarrow} \mathbf{GL}_n$$

einer surjektiven regulären Abbildung φ und der natürlichen Einbettung i der abgeschlossenen Teilmenge $\varphi(G)$ von $\mathbf{GL}_n$. Für die induzieren k-Algebra-Homomorphismen der Koordinatenringe erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} k[G] & k[\phi(G)] \arrow[l, "\varphi^*"'] \\ & k[\mathbf{GL}_n] \arrow[ul, "\phi^*"] \arrow[u, "i^*"'] \end{tikzcd}$$

mit

i^* surjektiv (weil i die Einbettung einer abgeschlossenen Teilvarietät ist)

φ^* injektiv (weil φ surjektiv ist).

ϕ^* surjektiv (wie oben gezeigt).

Mit ϕ^* ist auch φ^* surjektiv. Damit ist φ^* sogar bijektiv, also ist ϕ ein Isomorphismus von G mit der abgeschlossenen Untergruppe $\phi(G)$ von $\mathbf{GL}_n$.

<u>Zu (ii)</u>. Weil G eine F-Gruppe ist, kann man als Erzeuger f_i der k-Algebra

$$k[G] \cong k\otimes_F F[G],$$

wie sie am Anfang des Beweises von (i) konstruierten wurden, Elemente der F-Struktur

$$F[G] \subseteq k[G] = k[f_1,...,f_n]$$

wählen (nach 2.3.6 (iii)). Wir erhalten

$$F[f_1,...,f_n] \subseteq F[G] \tag{4}$$

und mit

$$V_F := F\bullet f_1 + ... + F\bullet f_n \text{ und } V := k\bullet f_1 + ... + k\bullet f_n \cong k\otimes_F V_F$$

gilt

$$s(g)(V) \subseteq V \text{ für jedes } g \in G,$$

und wie im Beweis von (i) ergibt sich für die Operaton a von G auf sich selbst durch Rechtstranslationen

$$a^*(V) \subseteq k[G]\otimes_k V.$$

Nach Wahl der f_i wird aus der Inklusin (4) nach Anwenden des Funktors $k\otimes_F$ ein Isomorphismus. Deshalb ist (4) selbst schon ein Isomorphismus[11], d.h. es gilt

$$F[f_1,...,f_n] = F[G].$$

Weil $V_F \subseteq F[G]\cap V$ den Unterraum V über k erzeugt, ist V definiert über F (vgl. zweiter Teil von 1.3.7) also ist $F[G]\cap V$ eine F-Struktur von V (vgl. Bemerkung (iii) des zweiten Teils von 1.3.7), d.h.

$$V = k\otimes_F V_F \subseteq k\otimes_F (F[G]\cap V) = V.$$

Es gilt das Gleichheitszeichen, und damit

$$V_F = F[G]\cap V.$$

Weil G eine F-Gruppe ist, ist die Operation a von G auf sich selbst durch Rechtstranslationen über F definiert. Deshalb gilt auf Grund der Definition der F-Struktur eines Produkts von F-Varietäten in 1.5.5, Aufgabe 3:

$$a^*(V_F) \subseteq (k[G]\otimes_k V) \cap F[G]\otimes_F F[G].$$

Wir wählen eine F-Vektorraumbasis von V_F, sagen wir

$$V_F = \sum_{i\in I} F\bullet\alpha_i ,$$

und ergänzen diese zu einer F-Vektorraumbasis von F[G], sagen wir

$$F[G] = \sum_{i\in J} F\bullet\alpha_i \text{ mit } I \subseteq J.$$

Die $\alpha_i\otimes\alpha_j$ mit $i, j \in J$ bilden dann eine F-Vektorraum Basis von

$$F[G]\otimes_F F[G] \quad (\subseteq k[G]\otimes_k k[G]),$$

---

[11] Für den Kokern C der natürlichen Einbettung $F[f_1,...,f_n] \hookrightarrow F[G]$ in der Kategorie der k-Vektorräume gilt $C\otimes_F k = 0$. Also muß C selbst schon Null sein.

welche gleichzeitig eine k-Vektorraumbasis von $k[G]\otimes_k k[G]$ ist. Es gilt

$$k[G]\otimes_k V = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} k\cdot(\alpha_j\otimes\alpha_i)$$

$$F[G]\otimes_F F[G] = \sum_{i\in J}\sum_{j\in J} F\cdot(\alpha_j\otimes\alpha_i)$$

also ist[12]

$$(k[G]\otimes_k V) \cap F[G]\otimes_F F[G] = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} F\cdot(\alpha_j\otimes\alpha_i) = F[G]\otimes V_F.$$

Damit gilt

$$a^*(V_F) \subseteq F[G]\otimes_k V_F.$$

Dieselben Betrachtungen wie im Beweis von (i) mit F[G] anstelle von k[G] und

$$V_F = F\cdot f_1 + ... + F\cdot f_n$$

anstelle von V zeigen, daß man dann die m_{ij} aus F[G] wählen kann. Die Einbettung

$$\phi: G \longrightarrow \mathbf{GL}_n,\ g \mapsto (m_{ij}(g))_{i,j=1,...,n}\ ,$$

ist dann über F definiert, d.h. es gilt (iii).
QED.

2.3.8 Lemma: abgeschlossene Untergruppen und Stabilität gegenüber deren Idealen.

Seien G eine lineare algebraische Gruppe, $H \subseteq G$ eine abgeschlossene Untergruppe und

$$I(H) \subseteq k[G]$$

das Ideal der abgeschlossenen Teilmenge H im Koordinatenring k[G]. Wie im zweiten Teil von 2.3.6 bezeichnen wir mit

$$\lambda, \rho: G \longrightarrow \mathrm{Aut}_k(k[G])$$

die Darstellungen von G durch Linkstranslationen $\lambda(g)$ bzw. Rechtstranslationen $\rho(g)$ auf k[G]. Dann gilt

$$H = \{g \in G \mid \lambda(g)\cdot I(H) = I(H)\ \} = \{g \in G \mid \rho(g)\cdot I(H) = I(H)\ \},$$

d.h. H besteht gerade aus denjenigen Elementen $g \in G$, für welche die Linkstranslation (bzw. Rechtstranslation) mit g das Ideal I(H) in sich überführen.
Beweis.
QED.

---

[12] Ein Element aus dem Durchschnitt hat die Gestalt

$$x = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij}\cdot(\alpha_j\otimes\alpha_i) = \sum_{i\in J}\sum_{j\in J} d_{ij}\cdot(\alpha_j\otimes\alpha_i) \text{ mit } c_{ij}\in k \text{ und } d_{ij}\in F.$$

Weil die $\alpha_j\otimes\alpha_i$ linear unabhängig über k sind, muß $d_{ij} = 0$ sein für $i \in J\text{-}I$ und $j\in J$. Deshalb ist

$$x = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} d_{ij}\cdot(\alpha_j\otimes\alpha_i) \in F[G]\otimes V_F$$

2.3.9 Aufgaben

2.3.9 Aufgabe 1

Seien G eine lineare algebraische Gruppe und X eine affine G-Varietät. Bezeichne

$$a: G\times X \longrightarrow X, (g, x) \mapsto g\bullet x,$$

die Operation von G auf X,

$$a^*: k[X] \longrightarrow k[G]\otimes_k k[X]$$

der auf den Koordinatenringen durch a induzierte k-Algebra-Homomorphismus und

$$s: G \longrightarrow \mathrm{Aut}_k\, k[X], g \mapsto s(g),$$

wie in 2.3.5 die zugehörige Darstellung der abstrakten Gruppe G in k[X] mit

$$(s(g)(f))(x) := f(a(g^{-1},x)) = f(g^{-1}\bullet x) \text{ für } g \in G \text{ und } f \in k[X].$$

Dann gibt es eine aufsteigende Folge

$$\{V_i\}_{i=1,2,...}$$

von endlich-dimensionalen k-linearen Unterräumen V_i von k[X] mit folgenden Eigenschaften.

(i) Jedes V_i ist G-stabil bezüglich s, und s definiert eine rationale Darstellung s_{V_i} von G in V_i (vgl. 2.3.6 A).

(ii) $k[X] = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i$.

Beweis. <u>Zu (i)</u>. Weil k[X] als affine k-Algebra endlich erzeugt ist, gibt es eine abzählbare k-Vektorraum-Basis von k[X] (die zum Beispiel aus gewissen Potenzprodukten eines endlichen Erzeugendensystems der k-Algebra k[X] besteht), sagen wir

$$k[X] = \sum_{j=1}^{\infty} k\bullet v_j .$$

Nach 2.3.6.A (i) gibt es für i = 1,2,3, ... einen endlich-dimensionalen k-linearen Unterraum V_i von k[X] mit (V_0 := 0 und)

$$\sum_{j=1}^{i} k\bullet v_j + V_{i-1} \subseteq V_i \text{ und } s(g)(V_i) \subseteq V_i \text{ für jedes } g \in G.$$

Nach Konstruktion ist die Folge der V_i aufsteigend.

Wegen $s(g)(V_i) \subseteq V_i$ für jedes $g \in G$ ist

$$s_{V_i}: G \longrightarrow GL(V_i), g \mapsto s(g)|_{V_i},$$

nach 2.3.6 A (ii) eine rationale Darstellung.

<u>Zu (ii)</u>. Nach Wahl der v_j und der Räume V_i gilt

$$k[X] = \bigcup_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{i} k\bullet v_j \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i \subseteq k[X],$$

also

$$k[X] = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i.$$

QED.

2.3.9 Aufgabe 2

Seien G eine lineare algebraische Gruppe und X eine affine G-Varietät. Dann gibt es einen Isomorphismus

$$\phi: X \xrightarrow{\cong} Y \hookrightarrow \mathbb{A}^n$$

mit einer abgeschlossenen Teilvarietät eines $\mathbb{A}^n$ und eine rationale Darstellung

$$r: G \longrightarrow \mathbf{GL}_n$$

mit

$$\phi(g\cdot x) = r(g)\cdot\phi(x)$$

für beliebige $g \in G$ und $x \in X$.

<u>Hinweis</u>: man passe den Beweis von 2.3.7 (i) an die vorliegende Situation an.

Beweis. Wir schreiben die Operation a von G auf X als Multiplikation,

$$a: G \times X \longrightarrow G, (g, x) \mapsto g\cdot x.$$

Als affine k-Algebra ist k[X] endlich erzeugt. Nach 2.3.6 (i) liegen je endlich viele Erzeuger in einen stabilen endlich-dimensionalen k-linearen Unterraum von k[X] bezüglich der durch a definierten Operation

$$s: G \longrightarrow \mathrm{Aut}_{k\text{-}Alg}(k[X]) \subseteq GL(k[X]), g \mapsto s(g),$$

mit

$$(s(g)f)(x) := f(a(g^{-1},x)) \text{ für } g \in G, f\in k[X] \text{ und } x \in X$$

(vgl. 2.3.6 A (i)). Eine Basis dieses Unterraums ist ebenfalls ein Erzeugendensystem der k-Algebra k[X]. Damit hat k[X] die Gestalt

$$k[X] = k[f_1,\dots, f_n],$$

wobei die f_i die Basis eines k-linearen Unteraums

$$V = k\cdot f_1+\dots+ k\cdot f_n \text{ , } \dim_k V = n,$$

von k[X] bilden mit

$$s(g)(V) \subseteq V \text{ für jedes } g \in G.$$

Weil die f_i die k-Algebra k[X] erzeugen, ist die reguläre Abbildung

$$\phi:X \longrightarrow k^n, p \mapsto \begin{pmatrix} f_1(p) \\ \dots \\ f_m(p) \end{pmatrix},$$

nach Bemerkung 1.3.1 (iii) injektiv und hat als Bild eine algebraische Varietät

$$Y := \phi(X).$$

Bezeichne

$$\psi: X \longrightarrow Y$$

den Morphismus ϕ aufgefaßt als Abbildung mit Werten in Y. Dies ist eine bijektive reguläre Abbildung. Aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\psi"'] \arrow[dr, "\phi"] & \\ Y \arrow[r, hook, "i"] & \mathbb{A}^n \end{tikzcd}$$

regulärer Abbildungen erhalten wir ein kommmutatives Diagramm von k-Algebra-Homomorphismen

$$\begin{array}{ccc} k[X] & & \\ \psi^*\uparrow & \nwarrow \phi^* & \\ k[Y] & \overset{i}{\hookrightarrow} & k[\mathbb{A}^n] \end{array}$$

Weil ψ surjektiv ist, ist ψ^* injektiv.

Ist $x_i \in k[Y]$ die Projektion auf die i-te Koordinate, so gilt

$$\phi^*(x_i) = x_i \circ \phi = f_i,$$

d.h. die Erzeuger f_i der k-Algebra $k[X]$ liegen im Bild des k-Algebra-Homomorphismus ϕ^*. Deshalb ist ϕ^* ist surjektiv. Mit ϕ^* muß auch die Injektion ψ^* surjektiv sein, d.h. ψ^* ist bijektiv, also ein Isomorphismus. Dann ist aber auch ψ ein Isomorphismus von affinen algebraischen Varietäten (das folgt auch aus dem ersten Teil des Beweises von 1.3.1 (iii)):

$$\psi: X \xrightarrow{\cong} Y.$$

Weil der Vektorraum V stabil ist unter der Operation von G besteht nach 2.3.6 (ii) die Inklusion $a^*(V) \subseteq k[G]\otimes_k V$. Insbesondere ist

$$(s(g)f_i)(x) = f_i(g^{-1}x) = \sum_{j=1}^{n} m_{ji}(g^{-1})\otimes f_j(x) \text{ mit } m_{ij} \in k[G].$$

also

$$s(g)f_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ji}(g^{-1})\bullet f_j. \tag{1}$$

Weil die f_j linear unabhängig sind über k, sind die Funktionen m_{ij}:$G\longrightarrow k$ durch diese Relation eindeutig bestimmt. Nach Bemerkung 2.3.5 (i) gilt $s(e) = \mathrm{Id}$ und (1) bekommt für diesen Fall die Gestalt

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ji}(e)\bullet f_j.$$

Deshalb gilt

$$m_{ij}(e) = \delta_{ij} \text{ für } i,j = 1,\dots,n. \tag{2}$$

Weil die m_{ij} in $k[G]$ liegen, ist die Abbildung

$$r: G \longrightarrow \mathbf{M}_n = \mathbb{A}^{n^2}, g \mapsto (m_{ij}(g))^T_{i,j=1,\dots,n},$$

ein Morphismus affiner algebraischer Varietäten.[13] Nach Bemerkung 2.3.5 (i) gilt

$$s(g'\bullet g'') = s(g')\circ s(g'') \text{ für beliebige } g', g'' \in G.$$

Zusammen mit (1) folgt

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ji}(g'\bullet g'')\bullet f_j \quad = s((g'\bullet g'')^{-1})f_i$$

---

[13] Die Zusammensetzungen der regulären Funktionen m_{ij} mit der regulären Abbildung

$G \longrightarrow G, x \mapsto x^{-1}$,

sind reguläre Abbildungen.

$$= s(g''^{-1}\cdot g'^{-1})f_i$$
$$= s(g''^{-1})(s(g'^{-1})f_i)$$
$$= s(g''^{-1})(\sum_{\alpha=1}^{n} m_{\alpha i}(g')\cdot f_\alpha) \qquad \text{(nach (1))}$$
$$= \sum_{\alpha=1}^{n} m_{\alpha i}(g')\cdot s(g''^{-1})(f_\alpha) \qquad \text{(s(g) ist linear nach Bem. 2.3.5(ii))}$$
$$= \sum_{\alpha=1}^{n} m_{\alpha i}(g'^{-1})\cdot(\sum_{j=1}^{n} m_{j\alpha}(g'')\cdot f_j) \qquad \text{(nach (1))}$$
$$= \sum_{j=1}^{n} (\sum_{\alpha=1}^{n} m_{j\alpha}(g'')\cdot m_{\alpha i}(g'))\cdot f_j$$

Damit sind zwei Linearkombinationen der Basis-Elemente f_j von V gleich. Es folgt

$$m_{ji}(g'\cdot g'') = \sum_{\alpha=1}^{n} m_{j\alpha}(g'')\cdot m_{\alpha i}(g') \text{ für } i,j = 1,...,n.$$

also

$$r(g'\cdot g'')^T = \begin{pmatrix} m_{11}(g'\cdot g'') & \dots & m_{1n}(g'\cdot g'') \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{n1}(g'\cdot g'') & \dots & m_{nn}(g'\cdot g'') \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} m_{11}(g'') & \dots & m_{1n}(g'') \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{n1}(g'') & \dots & m_{nn}(g'') \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_{11}(g') & \dots & m_{1n}(g') \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{n1}(g') & \dots & m_{nn}(g') \end{pmatrix}$$
$$= r(g'')^T\cdot r(g')^T \qquad \text{(Matrizen-Multiplikation)}$$

also

$$r(g'\cdot g'') = r(g')\cdot r(g'')$$

Speziell für $g'' = g'^{-1}$ erhalten wir

$$r(g')\cdot r(g'^{-1}) = r(e)$$

Wegen (2) steht rechts die Einheitsmatirx, d.h. die Matrizen der Gestalt r(g) sind umkehrbar. Wir können r als reguläre Abbildung affiner algebraischer Varietäten

$$r: G \longrightarrow \mathbf{GL}_n,\ g \mapsto (m_{ij}(g))^T_{ij=1,...,n},$$

auffassen, und - wie wir gerade gesehen haben - ist r auch ein Homomorphismus von Gruppen. Zusammen also eine rationale Darstellung.

Weiter gilt nach (1)

$$f_i(gx) = \sum_{j=1}^{n} m_{ji}(g)\cdot f_j(x), \tag{3}$$

also für $g \in G$ und $x \in X$

$$\phi(gx) = \begin{pmatrix} f_1(gx) \\ \dots \\ f_m(gx) \end{pmatrix} \qquad \text{(nach Definition von } \phi\text{)}$$

$$= \begin{pmatrix} m_{11}(g) & \dots & m_{n1}(g) \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{1n}(g) & \dots & m_{nn}(g) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix} \qquad \text{(nach (3))}$$

$$= r(g)\bullet\phi(x). \qquad \text{(nach Definition von r und } \phi\text{)}$$

QED.

2.4 Jordan-Zerlegung

2.4.1 Halbeinfache, nilpotente und unipotente Endomorphismen

Wir beginnen damit, an einige Ergebnisse der linearen Algebra zu erinnern. Sei

$$V$$

ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum. Ein linearer Endomorphismus

$$a: V \longrightarrow V$$

von V heißt <u>halbeinfach</u>, wenn V eine Basis besitzt, welche aus Eigenvektoren von a besteht. Der Endomorphismus heißt <u>nilpotent</u>, wenn eine Potenz identisch 0 auf V ist,

$$a^s = 0$$

für eine natürliche Zahl s, und er heißt <u>unipotent</u>, wenn a - 1 nilpotent ist. Die Algebra der k-linearen Endomorphismen von V wird mit

$$\mathrm{End}(V) := \mathrm{End}_k(V)$$

bezeichnet.

Bemerkungen

(i) Ein linearer Endomorphismus $a: V \longrightarrow V$ ist genau dann halbeinfach, wenn es eine Basis von V gibt, bezüglich welcher die die Matrix von a Diagonalgestalt besitzt.

(ii) Ist die Charakteristik p des Grundkörpers positiv,

$$\mathrm{Char}(k) = p > 0,$$

so sind für einen k-linearen Endomorphismus $a: V \longrightarrow V$ die beiden folgenden Bedingungen äquivalent.

(a) a ist unipotent.

(b) Es gibt eine natürliche Zahl s mit $a^{p^s} = 1$.

(iii) Die Einheitengruppe der k-Algebra End(V) ist gerade **GL**(V). Durch die Wahl einer Basis $e_1,...,e_n$ des k-Vektorraums V kann man End(V) mit der Algebra

$$\mathbf{M}_n$$

der n×n-Matrizen mit Einträgen aus k identifizieren und **GL**(V) mit $\mathbf{GL}_n$.

Beweis von (ii). <u>(a) ⇒ (b)</u>. Nach Voraussetzung gibt es eine natürliche Zahl s mt

$$(a-1)^s = 0.$$

Wir wählen eine natürliche Zahl t mit $s \le p^t$ und multiplizieren mit $(a-1)^{p^t-s}$. Wir erhalten

$$(a-1)^{p^t} = 0.$$

Weil die Charakteristik von k gleich p > 0 ist, gilt

$$(a-1)^p = \sum_{i=0}^{p} (-1)^{p-i}\binom{p}{i}\bullet a^i =^{14} a^p - 1$$

also

$$0 = (a-1)^{p^t} = a^{p^t} - 1,$$

also

$$a^{p^t} = 1.$$

(b) ⇒ (a). Aus $a^{p^t} = 1$ folgt

$$0 = a^{p^t} - 1 = (a-1)^{p^t},$$

d.h. a-1 ist nilpotent, also a unipotent.
QED.

2.4.2 Lemma: Mengen von kommutierenden Matrizen

2.4.2 A Der Fall von algebraisch abgeschlossenen Grundkörpern

Sei $S \subseteq \mathbf{M}_n$ eine Menge von Matrizen, von denen je zwei miteinander kommutieren. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) Es gibt ein $x \in \mathbf{GL}_n$ mit der Eigenschaft, daß xSx^{-1} aus oberen Dreiecksmatrizen besteht.

(ii) Sind alle Matrizen von S halbeinfach, dann gibt es ein $x \in GL_n$ derart, daß xSx^{-1} aus Diagonal-Matrizen besteht.

Beweis. Die Aussage ergibt sich als der Spezialfall F = k aus der nachfolgenden, denn die Eigenwerte jeder Matrix aus $\mathbf{M}_n$ liegen im algebraisch abgeschlossenen Körper k.
QED.

2.4.2 B Der Fall von beliebigen Grundkörpern

Seien $F \subseteq k$ ein Teilkörper und

$$S \subseteq \mathbf{M}_n(F)$$

eine Menge von n×n-Matrizen mit Einträgen aus F mit

1. $A\bullet B = B\bullet A$ für je zwei A, $B \in S$.
2. Für jedes $A \in S$ liegen alle Eigenwerte von A in F (d.h. das charakteristische Polynom von A zerfällt über F in lineare Faktoren).

Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) Es gibt ein $x \in \mathbf{GL}_n$ mit der Eigenschaft, daß xSx^{-1} aus oberen Dreiecksmatrizen besteht.

(ii) Sind alle Matrizen von S halbeinfach, dann gibt es ein $x \in GL_n$ derart, daß xSx^{-1} aus Diagonal-Matrizen besteht.

Beweis. Der Beweis der Aussage vereinfacht sich, wenn man sie in einer koordinaten-invarianten Weise formuliert:

---

[14] Dies gilt auch im Fall der geraden Primzahl p = 2, denn in der Charakteristik 2 gilt -1 = +1.

Seien V ein endlich-dimensionaler F-Vektorraum und $S \subseteq End_F(V)$ eine Menge von F-linearen Endomorpismen, von denen je zwei mitander kommutieren.
Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i') Es gibt eine vollständige[15] Fahne von F-linearen Unterräumen,

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset ... \subset V_n = V,$$

welche stabil ist gegenüber allen Endomorphismen aus S, d.h.

$$a(V_i) \subseteq V_i \text{ für alle i und alle } a \in S.$$

(ii') Sind alle Endomorphismen von S halbeinfach, so gibt es eine Zerlegung von V in eine direkte Summe von eindimensionalen F-linearen Unterräumen

$$V = W_1 \oplus ... \oplus W_r$$

welche S-stabil sind,

$$a(W_i) \subseteq W_i \text{ für alle i und alle } a \in S.$$

Zeigen wir zunächst, daß die Behauptung aus den beiden Aussagen (i') und (ii') folgt[16].
(i') ⇒ (i). Wir setzen $V = F^n$ und identifizieren die Matrizen $A \in S$ mit den zugehörigen linearen Endomorphismen

$$V \longrightarrow V, x \mapsto A \bullet x.$$

Wir betrachten die nach (i') existierende Fahne und wählen eine mit der Fahne verträgliche Basis $v_1,...,v_n$ von V, d.h.

$$V_i = F \bullet v_1 + ... + F \bullet v_i \text{ für } i = 0, ... , n.$$

Sei x der Automorphismus von V, welcher die Basis der v_i in die Standard-Einheitsbasis des k^n überführt,

$$x(v_i) = e_i .$$

Für $A \in S$ gilt $A(V_i) \subseteq V_i$, also

$$A(v_i) \subseteq F \bullet v_1 + ... + F \bullet v_i ,$$

also

$$(x \bullet A \bullet x^{-1}) \bullet e_i = x \bullet A \bullet v_i \subseteq x \bullet (F \bullet v_1 + ... + F \bullet v_i) = F \bullet e_1 + ... + F \bullet e_i.$$

Da dies für jedes i gilt, hat die Matrix $x \bullet A \bullet x^{-1}$ obere Dreiecksgestalt.
(ii') ⇒ (ii). Wir setzen wieder $V = F^n$ und identifizieren die Matrizen $A \in S$ mit den zugehörigen linearen Endomorphismen

$$V \longrightarrow V, x \mapsto A \bullet x.$$

Wir betrachten die nach (ii') existierende Zerlegung von V in eine direkte Summe und wählen eine mit dieser Zerlegung verträgliche Basis $v_1,...,v_n$ von V, sagen wir

$$W_i = F \bullet v_i \text{ für } i = 1,..., n.$$

[15] Es lassen sich keine weiteren Räume in die Fahne einfügen, ohne daß diese aufhört echt aufsteigend zu sein, d.h. die Dimension benachbarter Räume unterscheidet sich um 1, d.h. $\dim_F V_i = i$ für alle i.

[16] Wir beschränken uns darauf zu zeigen, daß die Implikationen (i') ⇒ (i) und (ii') ⇒ (ii) bestehen. Es gilt aber sogar (i') ⇔ (i) und (ii') ⇔ (ii).

Weiter sei x der Automorphismus von V, welcher die Basis der v_i in die Standard-Einheitsbasis des k^n überführt,

$$x(v_i) = e_i .$$

Für $A \in S$ gilt $A(F\cdot v_i) \subseteq F\cdot v_i$, also $A(v_i) = c_i\cdot v_i$ mit $c_i \in F$. Damit ist

$$(x\cdot A\cdot x^{-1})\cdot e_i = x\cdot A\cdot v_i = x\cdot(c_i\cdot v_i) = c_i\cdot e_i ,$$

d.h. die Matrix A ist eine Diagonalmatrix.
<u>Beweis von</u> (i') <u>und</u> (ii'). Wir führen den Beweis durch Induktion nach

$$n := \dim V.$$

<u>Induktionsanfang</u>: n = 1.
Beide Aussagen sind trivial, denn

$$\{0\} \subset V$$

ist eine vollständige Fahne aus S-stabilen Unterräumen und jeder lineare Endomorphismus von V multipliziert die Vektoren von V mit einem festen $c \in F$, d.h.

$$V - \{0\}$$

besteht aus Eigenvektoren.
<u>Induktionsschritt</u>. n > 1.
Falls S aus Vielfachen der identischen Abbildung von V besteht, sind alle linearen Unterräume S-stabil. Man kann dann eine beliebige vollständige Fahne von V bzw. eine beliebige direkte Zerlegung in 1-dimensionale lineare Unterräume wählen. Die Fahne genügt dann den Bedingungen von (i') und die direkten Summanden der Zerlegung denen von (ii').

Wir können deshalb annehmen, ein $A \in S$ ist kein Vielfaches der identischen Abbildung. Nach Voraussetzung besitzt A (wie jedes Element von S) einen Eigenvektor, sagen wir

$$A\cdot v = c\cdot v \text{ mit } c \in F.$$

Sei $W \subseteq V$ der Eigenraum zum Eigenwert c von A,

$$W = \{x \in V \mid A\cdot x = c\cdot x \} = \operatorname{Ker}(A-c\cdot I).$$

Dann gilt

$$0 \subset W \subset V \text{ (echte Inklusionen).}$$[17]

Für jedes $B \in S$ und jedes $w \in W$ gilt dann (weil A und B kommutieren)

$$A(Bw) = B(Aw) = B(c\cdot w) = c\cdot Bw,$$

d.h. Bw ist ein Eigenvektor von A zum Eigenwert c, es gilt $B(w) \in W$. Da dies für jedes $w \in W$ gilt, folgt

$$B(W) \subseteq W \text{ für jedes } B \in S,$$

d.h.

W ist S-stabil.

Betrachten wir die Situation von (i'). Wegen der S-Statilität von W induzieren die Abbildungen von S lineare Endomorphismen auf W und auf dem Faktorraum

$$\overline{V} := V/W.$$

Sei

$$\rho: V \longrightarrow \overline{V}$$

[17] Die linke Inklusion ist echt wegen $v \in W$, die rechte ist es, weil W kein Vielfaches der identischen Abbildung von V ist.

die natürliche Abbildung auf den Faktorraum. Wir bezeichnen die Menge der Einschränkungen der Elemente von S auf W mit

$$S' := \{B|_W : W \longrightarrow W \mid B \in S\}$$

und die Menge der durch die Elemente von S auf $\overline{V}$ induzierten Endomorphismen mit

$$S'' = \{\overline{B}: \overline{V} \longrightarrow \overline{V} \mid \overline{B} \text{ ist k-linear mit } \overline{B}\circ\rho = \rho\circ B \text{ für ein } B\in S\}.$$

Nach Konstruktion gilt

$$\dim W < \dim V \text{ und } \dim \overline{V} < \dim V.$$

Wir können die Induktionsvoraussetzung auf S' und S'' anwenden und erhalten in der Situation von (i') vollständige Fahnen

$$0 = W_0 \subset W_1 \subset \dots \subset W_d = W \text{ und } 0 = \overline{V}_0 \subset \overline{V}_1 \subset \dots \subset \overline{V}_{n-d} = \overline{V}$$

von W bzw. $\overline{V}$ aus F-linearen Unterräumen die S'-stabil bzw. S''-stabil sind. Wir setzen die vollständige Fahne von W mit den Urbildern bei ρ der Fahnen-Räume von $\overline{V}$ zusammen und erhalten eine vollständige Fahne

$$0 = W_0 \subset W_1 \subset \dots \subset W_d \,(= \rho^{-1}(\overline{V}_0)) \subset \rho^{-1}(\overline{V}_1) \subset \dots \subset \rho^{-1}(\overline{V}_{n-d}) = V$$

von V aus S-stabilen Unterräumen, d.h. es gilt (i').

In der Situation von (ii') ist $A \in S$ wie jedes Element von S halbeinfach. Der Raum V zerfällt in eine direkte Summe von Eigenräumen von A, sagen wir

$$V = W_1 \oplus \dots \oplus W_t.$$

Die Anzahl t dieser Räume ist größer als 1, weil im Fall t = 1 die Abbildung A ein Vielfaches der identischen Abbildung wäre. Deshalb gilt

$$\dim W_i < \dim V \text{ für } i = 1, \dots\ t.$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist jedes W_i direkte Summe von 1-dimensionalen S-stabilen Unterräumen. Dasselbe gilt dann aber auch für die direkte Summe V der W_i, d.h. es gilt (ii').

QED.

2.4.3 Lemma: Operationen mit halbeinfachen, nilpotenten und unipotenten Endomorphismen

Seien V und W endlich-dimensionale k-Vektorräume. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) Seien a, b: $V \longrightarrow V$ zwei kommutierende k-lineare Endomorphismen,

$$a\circ b = b\circ a.$$

Sind a und b halbeinfach (bzw. nilpotent bzw. unipotent), so gilt dasselbe auch für

$$a\circ b: V \longrightarrow V.$$

(ii) Seien a: $V \longrightarrow V$ und b: $W \longrightarrow W$ zwei k-lineare Endomorphismen.
Sind a und b halbeinfach (bzw. nilpotent bzw. unipotent), so gilt dasselbe auch für

$$a\oplus b: V\oplus W \longrightarrow V\oplus W \text{ und } a\otimes b: V\otimes W \longrightarrow V\otimes W.$$

(iii) Seien a: $V \longrightarrow V$ und b: $W \longrightarrow W$ zwei k-lineare Endomorphismen.
Sind a unb b halbeinfach (bzw. nilpotent), so gilt dasselbe auch für

$$a\otimes 1 + 1\otimes b: V\otimes W \longrightarrow V\otimes W.$$

Beweis. Zu (i) Wir wählen eine Basis von V und identifizieren a und b mit den Matrizen zu dieser Basis.

1. Fall: a und b sind halbeinfach.

Nach 2.4.2 (ii) gibt es eine Matrix x für welche xax^{-1} und xbx^{-1} Diagonalgestalt haben. Das Produk von Diagonal-Matrizen ist eine Diagonal-Matrix. Insbesondere ist

$$xax^{-1} \bullet xbx^{-1} = xabx^{-1}$$

eine Diagonal-Matrix, d.h. ab ist halbeinfach.

2. Fall: a und b sind nilpotent.

Nach Voraussetzung gilt

$$a^m = 0 = b^n.$$

Weil a und b kommutieren, folgt

$$(ab)^m = a^m \bullet b^m = 0 \bullet b^m = 0.$$

3. Fall: a und b unipotent.

Nach Voraussetzung gibt es natürliche Zahlen m und n mit

$$(a-1)^m = 0 \text{ und } (b-1)^n = 0.$$

Es gilt

$$a(b-1) + (a-1) = ab - a + a - 1 = ab - 1.$$

Weil a und b kommutieren, folgt

$$\begin{aligned}(ab - 1)^{m+n} &= (a(b-1) + (a-1))^{m+n}\\ &= \sum_{i=0}^{m+n} \binom{m+n}{i} \bullet a^i \bullet (b-1)^i \bullet (a-1)^{m+n-i}\end{aligned}$$

Es reicht zu zeigen, jeder Summand unter dem Summenzeichen ist 0. Dazu reicht es zu zeigen, daß für jedes i einer der Faktoren gleich 0 ist.

Für $i \geq n$ ist $(b-1)^i = 0$. Für $i < n$, d.h. $m+n-i > m+n-n = m$ ist $(a-1)^{m+n-i} = 0$.

Zu (ii). 1. Fall: a und b sind halbeinfach.

Nach Voraussetzung können wir Basen

$$v_1, \dots , v_m \in V \text{ und } w_1, \dots , w_n \in W$$

von V bzw. W so wählen, daß gilt

$$a(v_i) = c_i \bullet v_i \text{ mit } c_i \in k \text{ und } b(w_j) = d_j \bullet w_j \text{ mit } d_j \in k.$$

Die Vektoren

$$(v_1,0), \dots , (v_m,0), (0,w_1), \dots , (0,w_n) \in V \oplus W$$

bilden eine Basis von V⊕W mit

$$(a\oplus b)(v_i , 0) = (a(v_i), b(0)) = (c_i \bullet v_i, 0) = c_i \bullet (v_i,0)$$

$$(a\oplus b)(0, w_j) = (a(0),b(w_j)) = (0,d_j \bullet w_j) = d_i \bullet (0, w_j)$$

Die $(v_i, 0)$ und $(0, w_j)$ bilden eine Eigenbasis, d.h. $a\oplus b$ ist halbeinfach.

Weiter bilden die $v_i \otimes w_j$ eine Basis von $V\otimes W$, und es gilt

$$(a\otimes b)(v_i \otimes w_j) = a(v_i)\otimes b(w_j) = (c_i v_i)\otimes(d_j \bullet w_j) = c_i d_j (v_i \otimes w_j)$$

d.h. die $v_i \otimes w_j$ bilden eine Eigenbasis, d.h. $a\otimes b$ ist halbeinfach.

2. Fall: a und b nilpotent.

Für jede natürliche Zahl n gilt

$$(a \oplus b)^n = a^n \oplus b^n$$

Nach Voraussetzung können wir n so groß wählen, daß a^n und b^n gleich 0 werden, dann ist aber $(a\oplus b)^n = 0$.

Weiter gilt

$$(a\otimes b)^n = a^n \otimes b^n,$$

d.h. es ist auch $(a\otimes b)^n = 0$ für große n.
3. Fall: a und b unipotent.
Für $x \in V$ und $y \in W$ gilt

$$(a\oplus 1 - 1\oplus 1)\,(x,y) = (a(x), y) - (x,y) = (a(x)-x, 0) = (a-1)\oplus 0\,(x,y),$$

also

$$(a\oplus 1 - 1\oplus 1) = (a-1)\oplus 0$$
$$(a\oplus 1 - 1\oplus 1)^2 = (a-1)^2\oplus 0$$
$$\dots$$
$$(a\oplus 1 - 1\oplus 1)^n = (a-1)^n\oplus 0$$

Mit a ist also auch $a\oplus 1$ unipotent. Analog sieht man, daß auch $1\oplus b$ unipotent ist.
Weiter gilt

$$\begin{aligned}(a\oplus 1)(1\oplus b)\,(x,y)) &= (a\oplus 1)(x, b(y))\\ &= (a(x), b(y))\\ &= (1\oplus b)(a(x), y)\\ &= (1\oplus b)((a\oplus 1)(x,y)).\end{aligned}$$

Die unipotenten Abbildungen $a\oplus 1$ und $1\oplus b$ kommutieren. Nach (i) ist auch die Zusammensetzung

$$a\oplus b = (a\oplus 1)\circ(1\oplus b)$$

unipotent.

Betrachten wir das Tensorprodukt von a und b. Für $x \in V$ und $y\in W$ gilt

$$(a\otimes 1 - 1\otimes 1)(x\otimes y) = a(x)\otimes y - x\otimes y = (a-1)\otimes 1\,(x\otimes y),$$

also

$$(a\otimes 1 - 1\otimes 1) = (a-1)\otimes 1$$

also für jede natürliche Zahl n auch

$$(a\otimes 1 - 1\otimes 1)^n = (a-1)^n\otimes 1$$

Die rechte Seite wird 0 für große n, d.h.

$a\otimes 1$ ist unipotent.

Analog ergibt sich, daß auch

$1\otimes b$ unipotent

ist. Die beiden Abbildung kommutieren. Nach (i) ist auch die Zusammensetzung

$$(a\otimes 1)\circ(1\otimes b) = a\otimes b$$

unipotent.
Zu (iii). 1. Fall: a und b halbeinfach.
Nach Voraussetzung können wir Basen

$$v_1, \dots , v_m \in V \text{ und } w_1, \dots , w_n \in W$$

von V bzw. W so wählen, daß gilt

$$a(v_i) = c_i\bullet v_i \text{ mit } c_i \in k \text{ und } b(w_j) = d_j\bullet w_j \text{ mit } d_j \in k.$$

Die Tensorprodukte $v_i\otimes w_j$ bilden eine Basis von $V\otimes W$, und es gilt

$$\begin{aligned}(a\otimes 1 + 1\otimes b)(v_i\otimes w_j) &= a(v_i)\otimes w_j + v_i\otimes b(w_j)\\ &= (c_i+d_j)\bullet v_i\otimes w_j,\end{aligned}$$

d.h. die $v_i\otimes w_j$ bilden eine Eigenbasis für $a\otimes 1 + 1\otimes b$, d.h.

$$a\otimes 1 + 1\otimes b$$

ist halbeinfach.
2. Fall: a und b nilpotent.
Für jede natürliche Zahl n gilt

$$(a\otimes 1)^n = a^n\otimes 1 \text{ und } (1\otimes b)^n = 1\otimes b^n.$$

Mit a und b sind auch $a\otimes 1$ und $1\otimes b$ nilpotent. Wir können n groß wählen, daß

$$(a\otimes 1)^n = 0 \text{ und } (1\otimes b)^n = 0$$

gilt. Weil $a\otimes 1$ und $1\otimes b$ kommutieren, folgt

$$(a\otimes 1 + 1\otimes b)^{2n} = \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} (a\otimes 1)^i \circ (1\otimes b)^{2n-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} (a^i\otimes 1)\circ(1\otimes b^{2n-i})$$

Es reicht zu zeigen, jeder Summand unter dem Summenzeichen rechts ist Null.
Für $i \geq n$ ist $a^i\otimes 1 = 0\otimes 1$ gleich Null. Für $i < n$ ist $2n-i > 2n-n = n$, also

$$1\otimes b^{2n-i} = 1\otimes 0 = 0$$

QED.

2.4.4 Proposition: die additive Jordan-Zerlegung

Seien V ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum und $a \in End(V)$. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) Es gibt eindeutig bestimmte Endomorphismen $a_s, a_n \in End(V)$ mit folgenden Eigenschaften.
  1. a_s ist halbeinfach und a_n ist nilpotent.
  2. $a = a_s + a_n$ (additive Jordan-Zerlegung von a).
  3. $a_s \circ a_n = a_n \circ a_s$.

(ii) Es gibt (von a abhängige) Polynome $P, Q \in k[x]$ in einer Unbestimmten x ohne Absolutglied mit

$$a_s = P(a) \text{ und } a_n = Q(a)$$

für jedes $x \in End(V)$.

(iii) Sei $W \subseteq V$ eine a-stabiler k-linearer Unterraum von V. Dann ist W auch stabil unter a_s und a_n und

$$a|_W = a_s|_W + a_n|_W$$

ist die additve Jordan-Zerlegung der Einschränkung von a auf W.
Seien $\bar{a}$, $\bar{a}_s$ und $\bar{a}_n$ die durch a, a_s bzw. a_n induzierten k-linearen Abbildungen auf dem Faktorraum $\bar{V} = V/W$. Dann ist

$$\bar{a} = \bar{a}_s + \bar{a}_n$$

die additive Jordan-Zerlegung von $\bar{a}$.

(iv) Seien $\phi: V \longrightarrow W$ eine k-lineare Abbildung von endlich-dimensionalen k-Vektorräumen und $b \in End(W)$ mit

$$\phi\circ a = b\circ\phi.$$

Dann gilt auch

$$\phi\circ a_s = b_s\circ\phi \text{ und } \phi\circ a_n = b_n\circ\phi.$$

Bemerkungen

(i) Wir nennen a_s und a_n den <u>halbeinfachen</u> (bzw. <u>nilpotenten</u>) <u>Teil</u> von $a \in End(V)$.

(ii) Weil a_s und a_n kommutieren, gibt es eine Vektorraumbasis von V, bezüglich der die Matrizen a_s und a_n obere Dreiecksmatrizen sind (vgl. 2.4.2 (i)). Weil a_n nilpotent ist, müssen dann alle Einträge auf der Hauptdiagonalen der Matrix von a_n gleich Null sein, d.h. die Matrizen a und a_s haben dieselben Einträge auf der Hauptdiagonalen. Insbesondere gilt

$$\det(a) = \det(a_s) \text{ und } \det(a_n) = 0.$$

Beweis von 2.4.4. <u>Zu (i) und (ii)</u> (mit Ausnahme der Eindeutigkeitsaussage). Seien

$$\chi_a(x) := \det(x\bullet 1 - a) = \prod_{i=1}^{r} (x - \lambda_i)^{n_i}$$

das charakteristische Polynom von a und dessen Zerlegung in ein Produkt von paarweise teilerfremden linearen Faktoren und

$$V = V_i \oplus \ldots \oplus V_r$$

die Hauptraumzerlegung von V, wobei

$$V_i := \operatorname{Ker}(a - \lambda_i\bullet 1)^{n_i}$$

den Hauptraum zum Eigenwert λ_i bezeichne. Die V_i sind von 0 verschiedene a-stabile lineare Unterräume von V (weil a mit $a - \lambda_i\bullet 1$ kommutiert).Weil die Polynome $(x - \lambda_i)^{n_i}$ paarweise teilerfremd sind, gibt es nach dem Chinesischen Restesatz ein Polynom

$$P(x) \in k[x]$$

mit

$$P(x) \equiv \lambda_i \bmod (x - \lambda_i)^{n_i} \text{ für } i = 1,\ldots,r \tag{1}$$

Falls alle λ_i von Null verschieden sind, kann man P außerdem noch so wählen, daß auch

$$P(x) \equiv 0 \bmod x. \tag{2}$$

gilt. Das ist aber auch dann der Fall, wenn eines der λ_i gleich 0 ist, denn die zugehörige Kongruenz von (1) folgt dann aus (2)l.

Wir setzen

$$a_s := P(a).$$

1. <u>Schritt</u>. Die Einschränkung von a_s auf V_i ist gerade die skalare Multiplikation mit λ_i (für i = 1, ... , r).

Nach (1) gibt es ein Polynom $P_i(x) \in k[x]$ mit

$$P(x) = \lambda_i + P_i(x)\bullet (x - \lambda_i)^{n_i}.$$

Wir ersetzen die Unbestimmte x durch a und gehen zur Einschränkung auf

$$V_i = \operatorname{Ker}((a - \lambda_i\bullet 1)^{n_i})$$

über. Der zweite Summand wird dabei gleich Null. Deshalb gilt

$$a_s|_{V_i} = P(a)|_{V_i} = \lambda_i\bullet 1_{V_i}.$$

2. <u>Schritt</u>. a_s hat dieselben Eigenwerte wie a.

Sei $\lambda = \lambda_i$ ein Eigenwert von a und

$$W(\lambda) := \mathrm{Ker}(a - \lambda\bullet 1)$$

der zugehörige Eigenraum von a. Wegen

$$W(\lambda) := \mathrm{Ker}(a - \lambda\bullet 1) \subseteq \mathrm{Ker}((a - \lambda_i\bullet 1)^{n_i}) = V_i$$

und dem ersten Schritt ist dann

$$a_s|_{W(\lambda)} = \lambda\bullet 1|_{W(\lambda)}$$

Damit gilt

$$W(\lambda) \subseteq W_s(\lambda), \qquad (3)$$

wenn wir den Eigenraum von a_s zum Eigenwert λ mit

$$W_s(\lambda) := \mathrm{Ker}(\lambda\bullet 1 - a_s)$$

bezeichnen. Insbesondere ist jeder Eigenwert von a auch ein Eigenwert von a_s.

Sei jetzt umgekehrt μ ein Eigenwert von a_s. Wegen $a_s = P(a)$ kommutieren a und a_s miteinander. Für $w \in W_s(\mu)$ gilt deshalb

$$a_s(a(w)) = a(a_s(w)) = a(\mu\bullet w) = \mu\bullet a(w).$$

Damit ist a(w) ein Eigenvektor von a_s zum Eigenwert μ, d.h. $a(w) \in W_s(\mu)$. Weil dies für jedes $w \in W(\mu)$ der Fall ist, gilt $a(W_s(\mu)) \subseteq W_s(\mu)$. Der Raum

$$W_s(\mu) \text{ ist a-stabil.}$$

Weil k algebraisch abgeschlossen ist, besitzt a einen Eigenvektor in $W_s(\mu)$, sagen wir

$$0 \neq w \in W_s(\mu) \cap W(\lambda_i).$$

Wegen (3) gilt dann auch

$$0 \neq w \in W_s(\mu) \cap W_s(\lambda_i),$$

also ist $\mu = \lambda_i$ auch ein Eigenwert von a.

3. Schritt. Es gelten (i) und (ii).

Wir setzen

$$Q(x) := x - P(x)$$

und

$$a_n = Q(a) = a - P(a) = a - a_s$$

Dann gilt (ii). Man beachte wegen (1) ist das Absolutglied von P(x) gleich Null - und damit auch das von Q.

Nach dem zweiten Schritt ist V_i der Eigenraum von a_s zum Eigenwert λ_i. Weil V die direkte Summe der V_i ist, besitzt V eine Basis aus Eigenvektoren von a_s, d.h.

$$a_s \text{ ist halbeinfach.}$$

Nach Definition von V_i ist die Jordansche Normalform von $a|_{V_i}$ eine obere Dreiecksmatrix, deren Einträge auf der Hauptdiagonalen alle gleich λ_i sind. Dehalb ist

$$\begin{aligned} a|_{V_i} - \lambda_i\bullet 1_{V_i} &= (a - a_s)|_{V_i} && \text{(nach dem ersten Schritt)} \\ &= a_n|_{V_i} \end{aligned}$$

ist nilpotent. Weil dies für jedes i der Fall ist, ist auch

$$a_n \text{ nilpotent.}$$

Nach Definition von a_n gilt

$$a = a_s + a_n.$$

Als Polynome in a kommutieren $a_s = P(a)$ und $a_n = Q(a)$ miteinander,

$$a_s \circ a_n = a_n \circ a_s.$$

<u>Zur Eindeutigkeitsaussage von</u> (i).
Sei eine weitere additive Jordan-Zerlegung

$$a = b_s + b_n$$

von a gegeben, d.h. b_s soll halbeinfach und b_n nilpotent sein, und die beiden Endomorphismen von V sollen miteinander kommutieren,

$$b_s \circ b_n = b_n \circ b_s.$$

Wir haben zu zeigen,

$$b_s = a_s \text{ und } b_n = a_n.$$

Weil b_s und b_n miteinander kommutieren, kommutieren sie auch mit a:

$$\begin{aligned} a\bullet b_s &= (b_s + b_n)\bullet b_s \\ &= b_s^2 + b_n \bullet b_s \\ &= b_s^2 + b_s \bullet b_n \\ &= b_s \bullet (b_s + b_n) \\ &= b_s \bullet a \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} a\bullet b_n &= (b_s + b_n)\bullet b_n \\ &= b_s \bullet b_n + b_n^2 \\ &= b_n \bullet b_s + b_n^2 \\ &= b_n \bullet (b_s + b_n) \\ &= b_n \bullet a. \end{aligned}$$

Weil b_s und b_n mit a kommutieren, kommutieren sie auch mit $a_s = P(a)$ und $a_n = Q(a)$.
Wegen $a_s + a_n = a = b_s + b_n$ gilt

$$a_s - b_s = b_n - a_n.$$

Weil a_s und b_s kommutieren, ist auch $a_s - b_s$ halbeinfach. Weil b_n und a_n kommutieren, ist auch $b_n - a_n$ nilpotent. Damit ist der halbeinfache Endomorphismus auf der linken Seite nilpotent. Alle Eigenwerte müssen gleich 0 sein. Es folgt

$$a_s - b_s = 0$$

also auch

$$b_n - a_n = 0,$$

d.h. es ist

$$b_s = b_s \text{ und } b_n = a_n.$$

<u>Zu (iii)</u>. 1 .<u>Schritt</u>. $\chi_a(x) = \chi_{a|_W}(x)\cdot\chi_{\bar a}(x)$.

Wir betrachten das kommutative Diagramm von k-linearean Abbildungen mit exakten Zeilen.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & W & \longrightarrow & V & \xrightarrow{\rho} & V/W & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow a|_W & & \downarrow a & & \downarrow \bar a & & \\
0 & \longrightarrow & W & \longrightarrow & V & \xrightarrow{\rho} & V/W & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Wir wählen eine Basis von W, sagen wir,

$$w_1,\dots, w_r \in W$$

und ergänzen diese zu einer Basis von V,

$$w_1,\dots, w_r , v_1,\dots,v_s \in V.$$

Weil die w_i im Kern der natürlichen Abbildung ρ: $V \longrightarrow V/W$ auf den Faktorraum liegen, bilden die

$$\bar v_i := \rho(v_i) , i = 1,\dots,s,$$

ein Erzeugendensystem von V. Wegen

$$\dim V/W = \dim V - \dim W = r + s - r = s,$$

bilden sie sogar eine Basis von V/W. Betrachten wir die Matrizen der Abbildungen a, $a|_W$ und $\bar a$ bezüglich der eingeführten Basen. Weil W stabil ist bezüglich a, gilt

$$a(w_i) = \sum_{\alpha=1}^{r} c_{\alpha i}\cdot w_\alpha \text{ mit } c_{\alpha i} \in k \ (i = 1, \dots , r)$$

Die Matrix $M(a|_W)$ bezüglich der w_α ist damit gleich

$$M(a|_W) = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{r1} & \dots & c_{rr} \end{pmatrix}$$

Weiter ist

$$a(v_j) = \sum_{\alpha=1}^{r} d_{\alpha j}\cdot w_\alpha + \sum_{\beta=1}^{s} e_{\beta j}\cdot v_\beta \text{ mit } d_{\alpha j}, e_{\beta j} \in k \ (j=1,\dots,s)$$

Für die Matrix M(a) von a bezüglich der Basis der w_i und v_j erhalten wir so

$$M(a) = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1r} & d_{11} & \dots & d_{1s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{r1} & \dots & c_{rr} & d_{r1} & \dots & d^{r}_{s} \\ 0 & \dots & 0 & e_{1,1} & \dots & e_{1,s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & e_{s1} & \dots & e_{ss} \end{pmatrix}$$

Im linken oberen Block befindet sich gerade die Matrix $M(a|_W)$. Wir brauchen noch eine geeignete Interpretation des rechten unteren Blocks. Dazu wenden wir die natürlichen Abbildung $\rho: V \longrightarrow V/W$ auf die $a(v_j)$ an. Weil die $w_\alpha \in W$ im Kern von ρ liegen, erhalten wir

$$\begin{aligned}\bar{a}(\bar{v}_j) &= \bar{a}(\rho(v_j)) = \rho(a(v_j)) \\ &= \rho\Big(\sum_{\beta=1}^{s} e_{\beta j}\cdot v_\beta\Big) \\ &= \sum_{\beta=1}^{s} e_{\beta j}\cdot \rho(v_\beta) \\ &= \sum_{\beta=1}^{s} e_{\beta j}\cdot \bar{v}_\beta\end{aligned}$$

Die Matrix der e_{ij} ist somit gerade die Matrix von $\bar{a}$ bezüglich der Basis der $\bar{v}_\beta$:

$$M(\bar{a}) = \begin{pmatrix} e_{11} & \dots & e_{1s} \\ \dots & \dots & \dots \\ e_{s1} & \dots & e_{ss}\end{pmatrix}$$

Zusammen erhalten wir

$$M(a) = \begin{pmatrix} M(a|_W) & (d_{ij}) \\ 0 & M(\bar{a})\end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom von a ist damit gleich

$$\begin{aligned}\chi_a(x) &= \det(x\cdot 1 - M(a)) = \det\begin{pmatrix} x\cdot 1 - M(a|_W) & (-d_{ij}) \\ 0 & x\cdot 1 - M(\bar{a})\end{pmatrix} \\ &= \det(x\cdot 1 - M(a|_W)) \cdot \det(x\cdot 1 - M(\bar{a})) \\ &= \chi_{a|_W}(x)\cdot\chi_{\bar{a}}(x).\end{aligned}$$

2. Schritt. Die a_s- und a_n-Stabilität von W.

Nach Voraussetzung ist W a-stabil. Nach (ii) gilt $a_s = P(a)$ und $a_n = Q(a)$. Deshalb ist W auch a_s-stabil und a_n-stabil.

3. Schritt. Die Jordan-Zerlegung von $a|_W$.

Nach dem ersten Schritt ist das charakteristische Polynom von $a|_W$ ein Teiler des charateristischen Polynoms von a. Aus der Definition des Polynoms P durch die Bedingungen (1) lesen wir ab, daß wir zur Berrechnung von $(a|_W)_s$ aus $a|_W$ dasselbe Polynom P benutzen können wie für die Berrechnung von a_s aus a. Damit ist

$$(a|_W)_s = P(a|_W) = P(a)|_W = (a_s)|_W$$

und

$$(a|_W)_n = a|_W - (a|_W)_s = a|_W - (a_s)|_W = (a-a_s)|_W = (a_n)|_W$$

4. Schritt. Die Jordan-Zerlegung von $\bar{a}$.

Nach dem ersten Schritt ist das charakteristische Polynom von $\bar{a}$ ein Teiler des charateristischen Polynoms von a. Aus der Definition des Polynoms P durch die

Bedingungen (1) lesen wir ab, daß wir zur Berrechnung von $\overline{a}_s$ aus $\overline{a}$ dasselbe Polynom P benutzen können wie für die Berrechnung von a_s aus a. Damit ist

$$(\overline{a})_s = P(\overline{a}) = \overline{P(a)} = \overline{a}_s$$

Dabei sei $\overline{a}_s$ die durch a_s auf V/W induzierte Abbildung. Weiter gilt

$$(\overline{a})_n = \overline{a} - \overline{a}_s = \overline{a-a_s} = \overline{a}_n.$$

Dabei soll $\overline{a}_n$ die durch a_n auf V/W induzierte Abbildung bezeichnen.

Zu (iv). Wir betrachten das Diagramm von k-linearen Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{i} & V\oplus W \\ \downarrow a & & \downarrow a\oplus b \\ V & \xrightarrow{i} & V\oplus W \end{array}$$

mit

$$i = (id, \phi): V \longrightarrow V\oplus W, x \mapsto (x, \phi(x)).$$

Es ist kommutativ, denn für $x \in V$ gilt

$$\begin{aligned} (a\oplus b)(i(x)) &= (a\oplus b)(x, \phi(x)) && \text{(nach Definition von i)} \\ &= (a(x), b(\phi(x))) && \text{(nach Definition von } a\oplus b\text{)} \\ &= (a(x), \phi(a(x))) && \text{(nach Voraussetzung gilt } \phi\circ a = b\circ\phi\text{)} \\ &= i(a(x)) && \text{(nach Definition von i).} \end{aligned}$$

Nach Definition ist i injektiv. Deshalb können wir V mit seinem Bild bei i identifizieren und als linearen Unterraum von $V\oplus W$ betrachten. Die Kommutativität des Vierecks bedeutet dann, dieser Unterraum ist stabil bezüglich $a\oplus b$ und die Einschränkung von $a\oplus b$ ist gerade a.

Betrachten wir die additive Jordan-Zerlegung von $a\oplus b$:

$$a\oplus b = (a\oplus b)_s + (a\oplus b)_n. \tag{4}$$

Nach (iii) ist

$$a = (a\oplus b)_s|_V + (a\oplus b)_n|_V \tag{5}$$

die Jordan-Zerlegung von a.

1. Schritt. Die Summanden auf der rechten Seite von (4) haben die Gestalt

$$(a\oplus b)_s = a_s\oplus b_s \text{ und } (a\oplus b)_n = a_n\oplus b_n$$

Es gilt:

$a_s\oplus b_s$ ist halbeinfach und $a_n\oplus b_n$ ist nilpotent.

(nach 2.4.3 (ii)) und

$a\oplus b = a_s\oplus b_s + a_n\oplus b_n$

denn für $x \in V$ und $y \in W$ ist

$$\begin{aligned} (a_s\oplus b_s + a_n\oplus b_n)(x,y) &= (a_s\oplus b_s)(x,y) + (a_n\oplus b_n)(x,y) \\ &= (a_s(x), b_s(y)) + (a_n(x),b_n(y)) \\ &= (a_s(x) + a_n(x), b_s(y) + b_n(y)) \\ &= (a(x), b(y)) \\ &= (a\oplus b)(x,y). \end{aligned}$$

Nach (i) reicht es zu zeigen, daß $a_s \oplus b_s$ und $a_n \oplus b_n$ kommutieren. Das ist aber der Fall, denn für $x \in V$ und $y \in W$ gilt

$$\begin{aligned}((a_s \oplus b_s)\circ(a_n \oplus b_n))(x,y) &= (a_s \oplus b_s)(a_n(x), b_n(y))\\ &= (a_s(a_n(x)), b_s(b_n(y)))\\ &= (a_n(a_s(x)), b_n(b_s(y))) \qquad (a_s \text{ und } a_n \text{ bzw. } b_s \text{ und } b_n \text{ kommutieren})\\ &= (a_n \oplus b_n)(a_s(x), b_s(y))\\ &= ((a_n \oplus b_n)\circ(a_s \oplus b_s))(x,y).\end{aligned}$$

2. Schritt. Beweis der Behauptung.

Für jedes $x \in V$ gilt

$$\begin{aligned}a_s(x) &= (a\oplus b)_s|_V(x) && \text{(weil (5) die Jordan-Zerlegung von a ist)}\\ &= (a\oplus b)_s(i(x)) && \text{(wir identifizieren V mit seinem Bild bei i)}\\ &= (a_s \oplus b_s)(x, \phi(x)) && \text{(Definition von i)}\\ &= (a_s(x), b_s(\phi(x)))\end{aligned}$$

Dabei haben wir $a_s(x)$ mit seinem Bild bei i identifiziert, d.h. genauer bedeutet diese Identität,

$$i(a_s(x)) = (a_s(x), b_s(\phi(x))) \text{ für jedes } x \in V,$$

d.h.

$$(a_s(x), \phi(a_s(x))) = (a_s(x), b_s(\phi(x))).$$

Insbesondere ist also

$$\phi(a_s(x)) = b_s(\phi(x)) \text{ für jedes } x \in V,$$

d.h.

$$\phi\circ a_s = b_s\circ\phi.$$

Damit besteht die erste behauptete Identiät. Die analgoge Rechnung mit a_n anstelle von a_s führt zur zweiten: für jedes $x \in V$ gilt

$$\begin{aligned}a_n(x) &= (a\oplus b)_n|_V(x) && \text{(weil (5) die Jordan-Zerlegung von a ist)}\\ &= (a\oplus b)_n(i(x)) && \text{(wir identifizieren V mit seinem Bild bei i)}\\ &= (a_n \oplus b_n)(x, \phi(x)) && \text{(Definition von i)}\\ &= (a_n(x), b_n(\phi(x)))\end{aligned}$$

Dabei haben wir $a_n(x)$ mit seinem Bild bei i identifiziert, d.h. genauer bedeutet diese Identität,

$$i(a_n(x)) = (a_n(x), b_n(\phi(x))) \text{ für jedes } x \in V,$$

d.h.

$$(a_n(x), \phi(a_n(x))) = (a_n(x), b_n(\phi(x))).$$

Insbesondere ist also

$$\phi(a_n(x)) = b_n(\phi(x)) \text{ für jedes } x \in V,$$

d.h.

$\phi \circ a_n = b_n \circ \phi$.

QED.

2.4.5 Folgerung: die multiplikative Jordan-Zerlegung

Seien V ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum und $a \in \mathbf{GL}(V)$. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) Es gibt genau ein Paar (a_s, a_u) von Elementen aus $\mathbf{GL}(V)$ mit folgenden Eigenschaften.

1. a_s ist halbeinfach und a_u ist unipotent.
2. $a = a_s \bullet a_u = a_u \bullet a_s$. (multiplikative Jordan-Zerlegung)

(ii) Sei $W \subseteq V$ eine a-stabiler k-linearer Unterraum von V. Dann ist W auch stabil unter a_s und a_u und

$$a|_W = a_s|_W \bullet a_u|_W$$

ist die multiplikative Jordan-Zerlegung der Einschränkung von a auf W.
Seien $\overline{a}$, $\overline{a}_s$ und $\overline{a}_u$ die durch a, a_s bzw. a_u induzierten k-linearen Abbildungen auf dem Faktorraum $\overline{V} = V/W$. Dann ist

$$\overline{a} = \overline{a}_s \bullet \overline{a}_u$$

die multiplikative Jordan-Zerlegung von $\overline{a}$.

Bemerkung

Wir nennen a_s und a_u den <u>halbeinfachen</u> (bzw. <u>unipotenten</u>) <u>Teil</u> von $a \in \mathbf{GL}(V)$.

Beweis. <u>Zu (i)</u>. Sei

$$a = a_s + a_n$$

die additive Jordan-Zerlegung. Weil a umkehrbar ist, ist auch a_s umkehrbar (vgl. Bemerkung 2.4.4 (ii)). Wir können deshalb auf der rechten Seite a_s als Faktor ausklammern:

$$a = a_s \bullet a_u \text{ mit } a_u = 1 + a_s^{-1} a_n.$$

Weil a_s und a_n kommutieren, gilt dasselbe auch für a_s^{-1} und a_n :

$$a_s \bullet a_n = a_n \bullet a_s \Leftrightarrow a_n = a_s^{-1} \bullet a_n \bullet a_s \Leftrightarrow a_s \bullet a_s^{-1} = a_s^{-1} \bullet a_n.$$

Weil a_s^{-1} und a_n kommutieren ist mit a_n auch $a_s^{-1} a_n = a_u - 1$ nilpotent. Zusammen erhalten wir:

$$a_s \text{ ist halbeinfach und } a_u \text{ ist unipotent.}$$

Weil neben a_s^{-1} und a_n auch a_s und a_s^{-1} miteinander kommutieren, gilt dasselbe auch für a_s und $a_n = 1 + a_s^{-1} a_n$:

$$a_s \text{ und } a_u \text{ kommutierern.}$$

Bis auf die Eindeutigkeitsaussage ist damit (i) bewiesen. Sei jetzt neben

$$a = a_s \bullet a_u$$

eine weitere Produktzerlegung

$$a = a'_s \cdot a'_u$$

mit a'_s halbeinfach und a'_u unipotent gegeben, wobei a'_s und a'_u kommutieren. Dann kommutieren auch a'_s und a'_u-1. Außerdem ist a'_u-1 nilpotent. Deshalb ist

$$a = a'_s \cdot (1 + a'_u - 1) = a'_s + a'_s \cdot (a'_u - 1)$$

die additive Jordan-Zerlegung. Durch Vergleich mit der additiven Jordan-Zerlegung

$$a = a_s \cdot (1 + a_u - 1) = a_s + a_s \cdot (a_u - 1)$$

sehen wir (auf Grund von deren Eindeutigkeit), es gilt

$$a'_s = a_s \text{ und } a'_s \cdot (a'_u - 1) = a_s \cdot (a_u - 1).$$

Weil a_s umkehrbar ist, folgt $a'_s = a_s$ und $a'_u = a_u$, d.h. es gilt auch die Eindeutigkeitsaussagen von (i).

Zu (ii). Ist

$$a = a_s \cdot a_u$$

die multiplikative Jordan-Zerlegung von a, so ist - wie wir gerade gesehen haben -

$$a = a_s + a_s \cdot (a_u - 1) \tag{1}$$

die additive Jordan-Zerlegung von a. Nach 2.4.4 (iii) ist jeder a-stabile lineare Unterraum $W \subseteq V$ sowohl a_s-stabil als auch $a_s \cdot (a_u-1)$-stabil - und damit auch stabil unter a_u-1 und damit unter a_u.

Außerdem ist

$$a|_W = a_s|_W + a_s \cdot (a_u - 1)|_W$$

die additive Jordan-Zerlegung der Einschränkung von a auf W. Durch Ausklammern des halbeinfachen Teils erhalten wir wie im Beweis von (i) die multiplikative Jordan-Zerlegung von $a|_W$:

$$\begin{aligned} a|_W &= a_s|_W + a_s \cdot (a_u - 1)|_W \\ &= a_s|_W \cdot (1 + (a_u - 1))|_W \\ &= a_s|_W \cdot a_u|_W \end{aligned}$$

Ebenfalls nach 2.4.4 (iii) erhalten wir aus (1) die additive Jordan-Zerlegung der durch a auf V/W induzierten Abbildung, indem wir auch auf der rechten Seite zu den Abbildungen übergehen, die auf dem Faktorraum V/W induziert werden.

$$\overline{a} = \overline{a}_s + \overline{a}_s \cdot (\overline{a}_u - 1).$$

Erneut erhalten wir durch Ausklammern von $\overline{a}_s$ die zugehörige multiplikative Jordan-Zerlegung:

$$\begin{aligned} \overline{a} &= \overline{a}_s + \overline{a}_s \cdot (\overline{a}_u - 1) \\ &= \overline{a}_s \cdot (1 + (\overline{a}_u - 1)) \\ &= \overline{a}_s \cdot \overline{a}_u . \end{aligned}$$

QED.

2.4.6 Folgerung: Verträglichkeit mit direkten Summen undTensorprodukten

Seien V und W endlich-dimensionale k-Vektorräume, a und b lineare Automorphismen von V bzw. W,

$$a \in GL(V), b \in GL(W),$$

und

$$a = a_s a_u \text{ und } b = b_s b_u$$

deren multiplikative Jordan-Zerlegungen. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) $a\oplus b = (a_s \oplus b_s)\bullet(a_u \oplus b_u)$ ist die Jordan-Zerlegung von $a\oplus b \in GL(V\oplus W)$.

(ii) $a\otimes b = (a_s \otimes b_s)\bullet(a_u \otimes b_u)$ ist die Jordan-Zerlegung von $a\oplus b \in GL(V\otimes W)$.

Beweis. Zu (i): Es gilt

$$(a_s \oplus b_s)\bullet(a_u \oplus b_u) = (a_s \bullet a_u)\oplus(b_s \bullet b_u) = a\oplus b$$

und die Abbildungen $a_s \oplus b_s$ und $a_u \oplus b_u$ kommutieren:

$$(a_u \oplus b_u)\bullet(a_s \oplus b_s) = (a_u \bullet a_s)\oplus(b_u \bullet b_s) = (a_s \bullet a_u)\oplus(b_s \bullet b_u) = (a_s \oplus b_s)\bullet(a_u \oplus b_u).$$

Außerdem ist

$a_s \oplus b_s$ halbeinfach und $a_u \oplus b_u$ unipotent

(nach 2.4.3 (ii)).

Zu (ii): Es gilt

$$(a_s \otimes b_s)\bullet(a_u \otimes b_u) = (a_s \bullet a_u)\otimes (b_s \bullet b_u) = a\otimes b$$

und die Abbildungen $a_s \otimes b_s$ und $a_u \otimes b_u$ kommutieren:

$$(a_u \otimes b_u)\bullet(a_s \otimes b_s) = (a_u \bullet a_s)\otimes(b_u \bullet b_s) = (a_s \bullet a_u)\otimes(b_s \bullet b_u) = (a_s \otimes b_s)\bullet(a_u \otimes b_u).$$

Außerdem ist

$a_s \otimes b_s$ halbeinfach und $a_u \otimes b_u$ unipotent

(nach 2.4.3 (ii)).

QED.

2.4.7 Verallgemeinerung auf den lokal endlichen Fall

Sei V ein nicht notwendig endlich-dimensionaler k-Vektorraum. Wir bezeichnen auch in dieser Situation mit

$$\mathrm{End}(V) := \mathrm{End}_k(V)$$

die k-Algebra der linearen Endomorphismen von V und mit

$$\mathbf{GL}(V) := \mathbf{GL}_k(V)$$

die Gruppe der linearen Automorphismen von V. Ein Element

$$a \in \mathrm{End}(V)$$

heißt lokal endlich, wenn V Vereinigung von endlich-dimensionalen a-stabilen linearen Unterräumen ist.

Sei a ein lokal endlicher linearer Endomorphismus von V. Dann heißt a halbeinfach (bzw. lokal nilpotent bzw. lokal unipotent), wenn die Einschränkung von a auf einen beliebigen a-stabilen linearen Unterraum von endlicher Dimension halbeinfach (bzw. nilpotent bzw. unipotent) ist.

Bemerkungen

(i) **GL**(V) ist gerade die Einheitengruppe von End(V).

(ii) Ein linearer Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums ist genau dann halbeinfach im Sinne der hier angegebenen neuen Definition, wenn er es im Sinne der alten ist.

Es gilt sogar mehr: ist $a : V \longrightarrow V$ ein lokal endlicher linearer Endomorphismus des nicht notwendig endlich-dimenensionalen k-Vektorraums V, welcher halbeinfach im Sinne der neuen Definition ist, so zerfällt V in eine direkte Summe von Eigenräumen von a, d.h. es gilt

$$V = \bigoplus_{i\in I} V_{\lambda_i} \text{ mit } V_\lambda := \{x \in V \mid a(x) = \lambda\cdot x\}.$$

Dabei sei $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ die Familie der Elemente $\lambda\in k$, für welche $V_\lambda \neq 0$ ist.

(iii) Sei $a \in End(V)$ ein lokal endlicher Endomorphismus des nicht notwendig endlich-dimensionalen k-Vektorraums V. Dann gibt es genau eine Darstellung von a,

$$a = a_s + a_n, \tag{1}$$

als Summe von zwei lokal endlichen linearen Endomorphismen mit

1. a_s ist halbeinfach und a_n ist lokal nilpotent.
2. $a_s\cdot a_n = a_n\cdot a_s$.

Auch in dieser Situation heißt (1) <u>additive Jordan-Zerlegung</u>.

(iv) Seien

$$a, a', a'' \in End(V)$$

Endomorphismen des nicht notwendig endlich-dimensionalen k-Vektorraums V mit

$$a = a' + a'' \text{ und a lokal endlich.}$$

Dann sind folgenden Aussagen äquivalent.

1. $a = a'+a''$ ist die additive Jordan-Zerlegung von a.
2. Für jeden endlich-dimensionalen k-linearen und a-stabilen Unterraum $W\subseteq V$ ist

   $$a|_W = a'|_W + a''|_W$$

   die additive Jordan-Zerlegung von $a|_W$. Insbesondere ist W auch a'-stabil und a''-stabil.

(v) Seien $a \in End(V)$ ein lokal endlicher Endomorphismus des k-Vektorraums V und $W \subseteq V$ ein a-stabiler k-linearer Unterraum von V, wobei V und W nicht notwendig von endlicher Dimension sein müssen. Dann gelten die folgenden Aussagen.

1. $a|_W$ ein ein lokal endlicher Endomorphismus.
3. $a|_W = a_s|_W + a_n|_W$ ist die additve Jordan-Zerlegung der Einschränkung von a auf W. Insbesondere ist W sowohl a_s-stabil als auch a_n-stabil.

Weiter seien $\bar a$, $\bar a_s$ und $\bar a_n$ die durch a, a_s bzw. a_n induzierten k-linearen Abbildungen auf dem Faktorraum $\bar V = V/W$. Dann gelten folgende Aussagen.

4. $\bar a$ ist ein lokal endlicher Endomorphismus von $\bar V$.
5. $\bar a = \bar a_s + \bar a_n$ ist die additive Jordan-Zerlegung von $\bar a$ (vgl. 2.4.4 (iii)).

(vi) Sei $\phi: V \longrightarrow W$ eine k-lineare Abbildung von k-Vektorräumen (deren Dimension nicht notwendig endlich sein muß) und $a \in End(V)$, $b \in End(W)$ lokal endliche Endomorphismen mit

$$\phi\circ a = b\circ\phi.$$

Dann gilt auch $\phi\circ a_s = b_s\circ\phi$. und $\phi\circ a_n = b_n\circ\phi$.

(vii) Mulitplikative Jordan-Zerlegung. Sei $a \in \mathbf{GL}(V)$ ein lokal endlicher Automorphismus des nicht notwendig endlich-dimensionalen k-Vektorraums V. Dann gibt es genau eine Darstellung von a,

$$a = a_s \cdot a_u, \tag{2}$$

als Zusammensetzung von zwei lokal endlichen linearen Automorphismen mit

1. a_s ist halbeinfach und a_u ist lokal unipotent.
2. $a_s \cdot a_u = a_u \cdot a_s$.

Für jeden a-stabilen k-linearen Unterraum $W \subseteq V$ ist

$$a|_W = a_s|_W \cdot a_u|_W$$

die multiplikative Jordan-Zerlegung der Einschränkung von a auf W und

$$\bar{a} = \overline{a_s} \cdot \overline{a_u}$$

die multiplikative Jordan-Zerlegung von $\bar{a}$, wobei $\bar{a}$, $\overline{a_s}$ und $\overline{a_u}$ die durch a, a_s und a_u auf dem Faktorraum V/W induzierten Endomorphismen seien

(viii) Seien V und W nicht notwendig endlich-dimensionale k-Vektorräume, a und b zwei lokal endliche lineare Automorphismen von V bzw. W,

$$a \in GL(V),\ b \in GL(W),$$

und

$$a = a_s a_u \text{ und } b = b_s b_u$$

deren multiplikative Jordan-Zerlegungen. Dann gelten die folgenden Aussagen.

1. $a \oplus b = (a_s \oplus b_s) \cdot (a_u \oplus b_u)$ ist die Jordan-Zerlegung von $a \oplus b \in \mathbf{GL}(V \oplus W)$.
2. $a \otimes b = (a_s \otimes b_s) \cdot (a_u \otimes b_u)$ ist die Jordan-Zerlegung von $a \oplus b \in \mathbf{GL}(V \otimes W)$.

Beweis der Bemerkungen. Zu (i). trivial.

Zu (ii). Sei $a: V \longrightarrow V$ ein linearer Endomorphismus des endlich-dimensionalen k-Vektorraums V und $W \subseteq V$ ein a-stabiler linearer Unterraum.

Ist a halbeinfach in Sinne der alten Definition, so hat die additive Jordan-Zerlegung von a die Gestalt

$$a = a_s + 0.$$

Nach 2.4.4 (iii) ist

$$a|_W = a_s|_W + 0|_W$$

die additive Jordan-Zerlegung der Einschränkung von a auf W. Insbesondere ist $a|_W$ halbeinfach in Sinne der alten Definition. Weil dies für jeden a-stabilen Unterraum W von V gilt, ist a halbeinfach im Sinne der neuen Definition.

Sei jetzt umgekehrt a halbeinfach im Sinne der neuen Definition. Weil V als Unterraum von sich selbst endlich-dimensional ist, ist dann

$$a = a|_V$$

halbeinfach in Sinne der alten Definition.

Damit ist der erste Teil der Aussage von (ii) bewiesen. Befassen wir uns mit dem zweiten. Sei $a: V \longrightarrow V$ ein lokal endlicher k-linearer und halbeinfacher Endomorphismus des nicht-notwendig endlich-dimensionalen k-Vektorraums V. Wir haben zu zeigen, V zerfällt in eine direkte Summe der Eigenräume V_{λ_i}.

1. Schritt. $V = \sum_{i\in I} V_{\lambda_i}$.

Es reicht zu zeigen, jeder von 0 verschiedene Vektor $v \in V - \{0\}$ ist eine Summe von Eigenvektoren. Weil a lokal endlich ist, liegt v in einem endlich-dimensionalen a-stabilen Unterraum von V, sagen wir

$$v \in W, \dim_k W < \infty \text{ und } a(W) \subseteq W.$$

Weil a halbeinfach in Sinne der neuen Definition sein soll, ist $a|_W$ halbeinfach im Sinne der alten Definiton, d.h. v ist Summe von Eigenvektoren von $a|_W$ und damit auch von a.

2. Schritt. Die Summe des ersten Schritts ist direkt.

Nach dem ersten Schritt ist jeder Vektor

$$v \in V - \{0\}$$

Summe von endlich vielen Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten. Wir haben zu zeigen, diese Darstellung ist eindeutig.

Angenommen, sie ist es nicht. Dann gibt es eine Summe von Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten (mit mindestens zwei Summanden), welche gleich 0 ist, sagen wir

$$v_1 + ... + v_r = 0 \text{ mit } a(v_i) = \mu_i \cdot v_i \text{ und paarweise verschiedenen } \mu_i. \qquad (3)$$

Wir haben zu zeigen, dies ist unmöglich. Dabei können wir annehmen, daß $r \ge 2$ minimal gewählt ist. Die μ_i sind dann automatisch von 0 verschieden.

Aus (3) können wir zwei weitere Identitäten gewinnen, indem wir zum einen a auf (3) anwenden und zum andern (3) mit μ_1 multiplizieren. Wir erhalten

$$\mu_1 \cdot v_1 + \mu_2 \cdot v_2 + ... + \mu_r \cdot v_r = 0$$

$$\mu_1 \cdot v_1 + \mu_1 \cdot v_2 + ... + \mu_1 \cdot v_r = 0$$

Wir bilden die Differenz und erhalten

$$(\mu_2 - \mu_1) \cdot v_2 + ... + (\mu_r - \mu_1) \cdot v_r = 0$$

im Widerspruch zur Minimalität von r. Die Darstellung ist somit eindeutig und die Summe des ersten Schritts ist direkt.

Zu (iii) und (iv). Sei $a: V \longrightarrow V$ ein lokal endlicher k-linearer Endomorphismus. Wir haben die linearen Endomorphismen $a_s, a_n: V \longrightarrow V$ zu definieren Sei

$$v \in V - \{0\}.$$

Weil a lokal endlich ist, gibt es einen k-linearen Unterraum $W \subseteq V$ mit

$$\dim_k W < \infty, a(W) \subseteq W \text{ und } v \in W.$$

Wir betrachten die additive Jordan-Zerlegung

$$a|_W = (a|_W)_s + (a|_W)_n$$

und setzen

$$a_s(v) := (a|_W)_s(v) \text{ und } a_n(v) := (a|_W)_n(v). \qquad (4)$$

1. Schritt. Die Definitionen sind korrekt (d.h. unabhängig von der spezielen Wahl des endlich-dimensionalen Unterraums W).

Seien W' ein weiterer k-linearer Unterraum von V mit

$$\dim_k W' < \infty, a(W') \subseteq W' \text{ und } v \in W'$$

und

$$a|_{W'} = (a|_{W'})_s + (a|_{W'})_n$$

die additive Jordan-Zerlegung der Einschränkung von a auf W'. Dann gilt auch

$$\dim_k W\cap W' < \infty,\ a(W\cap W') \subseteq W\cap W' \text{ und } v \in W\cap W'.$$

Nach 2.4.4 (iii) können wir die additive Jordan-Zerlung der Einschränkung von a auf $W\cap W'$ dadurch erhalten, daß wir zumächt auf W und dann auf $W\cap W'$ einschränken,

$$a|_{W\cap W'} = (a|_W)_s|_{W\cap W'} + (a|_W)_n|_{W\cap W'} .$$

Wir können aber auch erst auf W' und dann auf $W\cap W'$ einschränken,

$$a|_{W\cap W'} = (a|_{W'})_s|_{W\cap W'} + (a|_{W'})_n|_{W\cap W'} .$$

Auf Grund der Eindeutigkeit der Jordan-Zerlegung erhalten wir

$$(a|_W)_s|_{W\cap W'} = (a|_{W\cap W'})_s = (a|_{W'})_s|_{W\cap W'}$$

und

$$(a|_W)_n|_{W\cap W'} = (a|_{W\cap W'})_n = (a|_{W'})_n|_{W\cap W'} .$$

Wegen $v \in W\cap W'$ folgt

$$(a|_W)_s(v) = (a|_{W'})_s(v) \text{ und } (a|_W)_n(v) = (a|_{W'})_n(v).$$

Die Definition von $a_s(v)$ und $a_n(v)$ ist damit unabhängig von der speziellen Wahl des Unterraums W.

Bemerkkung.

Auf Grund der Korrektheit der Definition haben wir eine Zerlegung

$$a = a' + a''$$

von a in eine Summe von k-linearen Endomorphismen konstruiert, welche der Bedingung 2 von Bemerkung (iv) genügt. Insbesondere sind a' und a" lokal endlich. Zum Beweis von Bemerkung (iii) reicht es zu zeigen, daß diese Zerlegung den Bedingungen von Aussage (iii) genügt, d.h.

1. a' ist halbeinfach und a" ist lokal endlich.
2. $a'\circ a'' = a''\circ a'$,

und daß die Zerlegung durch diese Bedingungen eindeutig bestimmt ist.

Mit anderen Worten, es reicht die Implikation 2 $\Rightarrow$ 1 von Bemerkung (iv) zu beweisen und die Eindeutigkeitsaussage von (iii).

Aus der Tatsache, daß sich die Zerlegung von Bemerkung (iii) in der hier gerade angegebenen Weise konstruieren läßt, ergibt sich auf Grund der noch zu beweisenden Eindeutigkeitsaussage von Bemerkung (iii), daß auch die Implikation 1 $\Rightarrow$ 2 von Bemerkung (iv) besteht.

2. Schritt: Falls die Zerlegung $a = a' + a''$ von Bemerkung (iv) der Bedingung 2 genügt, so gilt $a'\circ a'' = a''\circ a'$.

Sei $v \in V$. Weil a lokal endlich ist, gibt es einen k-linearen Unterraum $W \subseteq V$ mit

$$\dim_k W < \infty,\ a(W) \subseteq W \text{ und } v \in W.$$

Nach Voraussetzung ist

$$a|_W = a'|_W + a''|_W$$

die additive Jordan-Zerlegung von $a|_W$. Insbesondere gilt $a'(W)\subseteq W$, $a''(W)\subseteq W$ und

$$(a'|_W)\circ(a''|_W) = (a''|_W)\circ(a'|_W)$$

also

$$(a'\circ a'')(v) = a'(a''(v)) = a'|_W (a''|_W (v)) = a''|_W (a'|_W (v)) = (a''\circ a')(v).$$

Weil dies für jedes $v \in V$ gilt, gilt $a'\circ a'' = a''\circ a'$ wie behauptet.

3. Schritt: Falls die Zerlegung $a = a' + a''$ von Bemerkung (iv) der Bedingung 2 genügt, ist a' halbeinfach und a'' lokal nilpotent.

Seien W' und W'' zwei k-lineare Unterräume von V mit einer endlichen Dimension mit

$$a'(W') \subseteq W' \text{ und } a''(W'') \subseteq W''.$$

Wir haben zu zeigen, $a'|_{W'}$ ist halbeinfach und $a''|_{W''}$ ist nilpotent.

Weil a lokal endlich ist, gibt es einen endlich-dimensionalen k-linearen Unterraum $W\subseteq V$ mit

$$W' \subseteq W \text{ und } W'' \subseteq W.$$

Nach Voraussetzung ist

$$a|_W = a'|_W + a''|_W$$

die Jordan-Zerlegung von $a|_W$. Insbesondere ist $a'|_W$ halbeinfach und $a''|_W$ nilpotent.

Mit $a''|_W$ ist auch $a''|_{W''} = (a''|_W)|_{W''}$ nilpotent.

Weil $a'|_W$ halbeinfach ist im Sinne der alten Definition, ist $a'|_W$ auch halbeinfach in Sinne der neuen Definitin (nach Bemerkung (ii)). Insbesondere ist damit

$$a''|_{W''} = (a''|_W)|_{W''}$$

halbeinfach in Sinne der alten Definition.

Wir haben noch die Eindeutigkeitsaussage von Bemerkung (iii) zu beweisen.

Sei

$$a = a'_s + a'_n$$

eine weitere Zerlegung wie in (iii) neben der soeben konstruierten (mit a'_s und a'_n lokal endlich, a'_s halbeinfach, a'_n lokal nilpotent und $a'_s\bullet a'_n = a'_n\bullet a'_s$) Wir haben zu zeigen,

$$a_s = a'_s \text{ und } a_n = a'_n.$$

4. Schritt. a'_s kommutiert mit a.

Weil a'_s und a'_n miteinander kommutieren, gilt:

$$\begin{aligned} a\bullet a'_s &= (a'_s + a'_n)\bullet a'_s \\ &= a'^2_s + a'_n\bullet a'_s \\ &= a'^2_s + a'_s\bullet a'_n \\ &= a'_s\bullet (a'_s + a'_n) \\ &= a'_s\bullet a \end{aligned}$$

5. Schritt. $a_s = a'_s$ und $a_n = a'_n$.

Sei $v \in V - \{0\}$ vorgegeben. Weil a'_s lokal endlich ist, gibt es einen k-linearen Unterraum W von V mit

$$\dim_k W < \infty,\ a'_s(W) \subseteq W,\ v \in W.$$

Weil W endlich-dimensional ist und a lokal endlich, gibt es einen k-linearen Unterraum W' von V mit

$$\dim_k W' < \infty,\ a(W') \subseteq W',\ W \in W'.$$

Weil a und a'_s kommutieren, gilt für i = 1,2,3,...

$$a'_s(a^i(W)) = a^i(a'_s(W)) \subseteq a^i(W) \qquad (\subseteq a^i(W') \subseteq W'),$$

d.h. $a^i(W)$ ist für jedes i ebenfalls a'_s-stabil. Damit ist

$$\sum_{i=0}^{\infty} a^i(W) \qquad (\subseteq W')$$

ein endlich-dimensionaler a'_s-stabiler Unterraum, der auch a-stabil ist. Wir können also W durch diese Summe ersetzen und annehmen,

W ist a'_s- und a-stabil

Dann ist W aber auch stabil bezüglich $a'_n = a - a'_s$ und als a-stabiler Raum nach Definition der Zerlegung $a = a_s+a_n$ auch stabil bezüglich a_s und a_n. Zusammen erhalten wir:

W ist stabil bezüglich a, a_s, a_n, a'_s, a'_n (und es gilt $v \in W$).

Damit sind

$$a|_W = a_s|_W + a_n|_W \text{ und } a|_W = a'_s|_W + a'_n|_W$$

zwei Jordan-Zerlegungen desselben Endomorphismus auf dem endlich-dimensionalen Raum W. Wegen der Eindeutigkeit der Jordan-Zerlegung im endlich-dimensionalen Fall, folgt

$$a_s|_W = a'_s|_W \text{ und } a_n|_W = a'_n|_W.$$

und insbesondere

$$a_s(v) = a'_s(v) \text{ und } a_n(v) = a'_n(v).$$

Das dies für jedes $v \in V$ gilt, folgt

$$a_s = a'_s \text{ und } a_n = a'_n.$$

Zu (v). 1. Schritt. $a|_W$ ist lokal endlich.

Sei $v \in W - \{0\}$. Wir haben zu zeigen v liegt in einem endlich-dimensionalen k-linearen und $a|_W$-stabilen Unterraum von W. Weil a lokal endich ist, gibt es einen k-linearen Unterraum $W' \subseteq V$ mit

$$\dim_k W' < \infty,\ a(W') \subseteq W' \text{ und } v \in W'.$$

Weil W nach Voraussetzung a-stabil ist und den Vektor v enthält, bleiben diese Bedingungen an W' erhalten, wenn man W' durch $W \cap W'$ ersetzt. Damit ist aber $W \cap W'$ ein Unterraum der gesuchten Art.

2. Schritt. W ist a_s-stabil und a_n-stabil.

Sei $v \in W$. Wir haben zu zeigen, $a_s(v) \in W$ und $a_n(v) \in W$.

Weil nach dem ersten Schritt $a|_W$ lokal endlich ist, gibt einen einen k-linearen Unterraum W' von W mit

$$\dim_k W' < \infty,\ a(W') \subseteq W' \text{ und } v \in W'.$$

Nach (iv) ist

$$a|_{W'} = a_s|_{W'} + a_n|_{W'}$$

gerade die Jordan-Zerlegung der Einschränkung $a|_{W'}$ von a auf W', und W' ist sowohl a_s-stabil als auch a_n-stabil. Wegen $v \in W'$ folgt

$$a_s(v) \in a_s(W') \subseteq W' \subseteq W$$

und

$$a_n(v) \in a_n(W') \subseteq W' \subseteq W.$$

3. Schritt. . $a|_W = a_s|_W + a_n|_W$ ist die additve Jordan-Zerlegung von $a|_W$
Nach (iv) reicht es zu zeigen, für jeden endlich-dimensionalen k-linearen und $a|_W$-stabilen Unterraum $W' \subseteq W$ ist

$$a|_W|_{W'} = a_s|_W|_{W'} + a_n|_W|_{W'}$$

die additive Jordan-Zerlegung von $a|_W|_{W'}$, d.h.

$$a|_{W'} = a_s|_{W'} + a_n|_{W'}$$

ist die additive Jordan-Zerlegung von $a|_{W'}$. Weil die Dimension von W' endlich ist, ist das aber nach (iv) der Fall.

4. Schritt. $\bar{a}$ ist lokal endlich.
Bezeichne

$$\rho: V \longrightarrow V/W = \bar{V}$$

die natürliche Abbildung auf den Vektorraum. Wir haben zu zeigen, jeder Vektor

$$\bar{v} \in \bar{V} - \{0\}$$

liegt in einem k-linearen und $\bar{a}$ Unterraum von $\bar{V}$ mit einer endlichen Dimension. Zum Beweis wählen wir einen Vektor

$$v \in V \text{ mit } \rho(v) = \bar{v}.$$

Weil a lokal endlich ist, gibt es einen k-linearern Unterraum $W' \subseteq V$ mit

$$\dim_k W' < \infty,\ a(W') \subseteq W' \text{ und } v \in W'.$$

Mit

$$\bar{W}' := \rho(W')$$

gilt dann

$$\dim_k \bar{W}' < \infty,\ \bar{a}(\bar{W}') \subseteq \bar{W}' \text{ und } \bar{v} \in \bar{W}'.$$

5. Schritt. $\bar{a} = \bar{a}_s + \bar{a}_n$ ist die additive Jordan-Zerlegung von $\bar{a}$.

Nach (iv) reicht es zu zeigen, für jeden endlich-dimensionalen k-linearen und $\bar{a}$-stabilen Unterraum $\bar{W}' \subseteq \bar{V}$ ist

$$\bar{a}|_{\bar{W}'} = \bar{a}_s|_{\bar{W}'} + \bar{a}_n|_{\bar{W}'}$$

die Jordan-Zerlegung von $\bar{a}|_{\bar{W}'}$.

Weil die Dimension von $\bar{W}'$ endlich ist, gibt es k-linearen Unterraum $W' \subseteq V$ mit

$$\dim_k W' < \infty \text{ und } \rho(W') = \bar{W}'.$$

Weil a lokal endlich ist und W' von endlicher Dimension, gibt es einen k-linearen Unterraum V' von V mit

$$\dim V' < \infty,\ a(V') \subseteq V',\ W' \subseteq V'.$$

Sei

$$\rho' := \rho|_{V'} : V' \longrightarrow \overline{V}' := V'+W/W = V'/V'\cap W$$

die Einschränkung des natürlichen Homomorphismus ρ. Wegen $W' \subseteq V'$ gilt

$$\overline{W}' = \rho(W') \subseteq \rho(V') = \rho'(V').$$

Weil $\rho':V' \longrightarrow V'/V'\cap W$ surjektiv ist, folgt

$$\overline{W}' = \rho'(\rho'^{-1}(\overline{W}')),$$

d.h. $\overline{W}'$ ist das Bild des endlich-dimensionalen Unterraums $\rho'^{-1}(\overline{W}')$ von V'. Wir können also annehmen,

$$W' := \rho'^{-1}(\overline{W}') \; (\subseteq V').$$

Für $x \in W' \subseteq V'$ gilt, weil V' a-stabil ist, $a(x) \in V'$ und

$$\begin{aligned}
\rho'(a(x)) &= \rho(a(x)) && (\rho' \text{ ist die Einschränkung von } \rho \text{ auf } V') \\
&= \overline{a}(\rho(x)) && (\text{Definition von } \overline{a}) \\
&= \overline{a}(\rho'(x)) && (x \text{ liegt in } W' \subseteq V') \\
&\in \overline{a}(\overline{W}') && (\text{wegen } x \in W' = \rho'^{-1}(\overline{W}')) \\
&\subseteq \overline{W}' && (\overline{W}' \text{ ist } \overline{a}\text{-stabil})
\end{aligned}$$

Es folgt

$$a(x) \in \rho'^{-1}(\overline{W}') = W' \text{ für jedes } x \in W',$$

d.h. W' ist a-stabil. Wir betrachten das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& W' \arrow[rr, hook] \arrow[dd, "h'" near start] & & V' \arrow[rr, hook] \arrow[dd, "h'" near start] & & V \arrow[dd, "h"] \\
W' \arrow[ur, "a''"] \arrow[rr, hook, crossing over] \arrow[dd, "h''"] & & V' \arrow[ur, "a'"] \arrow[rr, hook, crossing over] & & V \arrow[ur, "a"] & \\
& \overline{W}' \arrow[rr, hook] & & \overline{V}' \arrow[rr, hook] & & \overline{V} \\
\overline{W}' \arrow[ur, "\overline{a}''"] \arrow[rr, hook] & & \overline{V}' \arrow[ur, "\overline{a}'"] \arrow[rr, hook] \arrow[from=uu, crossing over, "h'"] & & \overline{V} \arrow[ur, "\overline{a}"] \arrow[from=uu, crossing over, "h"] &
\end{tikzcd}$$

Die horizontalen Pfeile bezeichnen natürliche Einbettungen, die oberen von $W'\subseteq V'\subseteq V$ ineinander, die unteren der Faktorräume $\overline{W}'\subseteq \overline{V}'\subseteq \overline{V}$ ineiander. Die vertikalen Abbildungen sind die natürlichen Abbildungen auf die jeweiligen Faktorräume, so daß die vorderen und hinteren Vierecke kommutativ sind.

Die Kommutativität der oberen Vierecke definiert a' und a'' als Einschränkungen von a auf V' bzw. W'.

Die Kommutativität der unteren Vierecke definiert $\overline{a}'$ und $\overline{a}''$ als Einschränkungen von $\overline{a}$ auf $\overline{V}'$ bzw. $\overline{W}'$.

Die Kommutativität der beiden seitlichen und des mittleren Vierecks definiert $\overline{a}$, $\overline{a}'$ und $\overline{a}''$ als die durch a, a' und a'' auf den Faktorräumen induzierten Abbildungen. Dies ist mit den vorherigen Definitionen als Einschränkungen verträglich, weil der Übergang zum Faktorraum mit Inklusionen verträglich ist.

So können wir erst zu der durch a induzierten Abbildung $\bar{a}$ auf dem Faktorraum übergehen,

$$\bar{a}: \bar{V} \longrightarrow \bar{V},\ x \bmod W \mapsto a(x) \bmod W,$$

und dann diese Abbildung auf $\bar{W}'$ einschränken zu

$$\bar{a}'': \bar{W}' \longrightarrow \bar{W}',\ x \bmod W \mapsto a(x) \bmod W.$$

Wir können aber auch a zuerst auf W' einschränken,

$$a'': W' \longrightarrow W',\ x \mapsto a(x),$$

und dann die induzierte Abbildung auf dem Faktorraum bilden,

$$\bar{a}'': \bar{W}' \longrightarrow \bar{W}',\ x \bmod W \mapsto a(x) \bmod W.$$

das Ergebnis ist in beiden Fällen dasselbe. Aus der Jordan-Zerlegung

$$a = a_s + a_n$$

wird im zweiten Fall zunächst die Jordan-Zerlegung

$$a|_{W'} = a_s|_{W'} + a_n|_{W'}$$

und dann nach 2.4.4 (iii) - weil W' endlich-dimensional ist - die Jordan-Zerlegung

$$\bar{a}''|_{\bar{W}'} = \bar{a}''_s|_{\bar{W}'} + \bar{a}''_n|_{\bar{W}'}$$

Da diese Abbildungen gleichzeitig die Einschränkungen auf $\bar{W}'$ der entsprechenden Endomorphismen von $\bar{V}$ sind, bedeutet dies (nach (iv)), daß die auf $\bar{V}$ induzierten Abbildungen gerade die Jordan-Zerlegung von $\bar{a}$ definieren,

$$\bar{a}'' = \bar{a}''_s + \bar{a}''_n.$$

Zu (vi). Der Beweis ist im wesentlichen derselbe wie der von 2.4.4.(iv). Wir betrachten das Diagramm von k-linearen Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{i} & V\oplus W \\ \downarrow a & & \downarrow a\oplus b \\ V & \xrightarrow{i} & V\oplus W \end{array}$$

mit

$$i = (id, \phi)\ V \longrightarrow V\oplus W,\ x \mapsto (x, \phi(x)).$$

Es ist kommutativ, denn für $x \in V$ gilt

$$\begin{aligned} (a\oplus b)(i(x)) &= (a\oplus b)(x, \phi(x)) && \text{(nach Definition von i)} \\ &= (a(x), b(\phi(x))) && \text{(nach Definition von } a\oplus b) \\ &= (a(x), \phi(a(x))) && \text{(nach Voraussetzung gilt } \phi\circ a = b\circ\phi) \\ &= i(a(x)) && \text{(nach Definition von i).} \end{aligned}$$

Nach Definition ist i injektiv. Deshalb können wir V mit seinem Bild bei i identifizieren und als linearen Unterraum von $V\oplus W$ betrachten. Die Kommutativität des Vierecks bedeutet dann, der Unterraum V von $V\oplus W$ ist stabil bezüglich $a\oplus b$ und die Einschränkung von $a\oplus b$ auf V ist gerade a.

Betrachten wir die additive Jordan-Zerlegung von $a\oplus b$:

$$a\oplus b = (a\oplus b)_s + (a\oplus b)_n. \tag{5}$$

Nach (v) ist

$$a = (a\oplus b)_s|_V + (a\oplus b)_n|_V \tag{6}$$

die Jordan-Zerlegung von a.

1. Schritt. Die Summanden auf der rechten Seite von (5) haben die Gestalt

$$(a\oplus b)_s = a_s\oplus b_s \text{ und } (a\oplus b)_n = a_n\oplus b_n$$

Sei $U \subseteq V\oplus W$ ein endlich-dimensionaler k-linearer Unterraum, welcher stabil ist bei $a_s\oplus b_s$ (bzw. bei $a_n\oplus b_n$). Dann gibt es endlich-dimensionale k-lineare Unterräume

$$V' \subseteq V \text{ und } W' \subseteq W$$

mit

$$U \subseteq V'\oplus W'.$$

Indem wir V' und W' geeignet vergrößern können wir außerdem erreichen (vgl. (iv)):

V' ist stabil unter a (also auch bei a_s und a_n)

W' ist stabil unter b (also auch bei b_s und b_n).

Nach Definition sind mit a_s und b_s auch $a_s|_{V'}$ und $b_s|_{W'}$ halbeinfach und weil a_n und b_n lokal nilpotent sind, sind es auch $a_n|_{V'}$ und $b_n|_{W'}$. Nach 2.3.3 (ii) folgt:

$(a_s\oplus b_s)|_{V'\oplus W'} = (a_s|_{V'})\oplus(b_s|_{W'})$ ist halbeinfach und

$(a_n\oplus b_n)|_{V'\oplus W'} = (a_n|_{V'})\oplus(b_n|_{W'})$ ist nilpotent.

Nach 2.4.4 (iii) bleiben diese Eigenschaften erhalten, wenn man die Abbildungen auf stabile Unterräume einschränkt, d.h.

$(a_s\oplus b_s)|_U$ ist halbeinfach (bzw. $(a_n\oplus b_n)|_U$ ist nilpotent).

Da dies für jeden endlich-dimensionalen k-linearen Unterraum U von $V\oplus W$ gilt, welcher stabil ist unter $a_s\oplus b_s$ (bzw. $a_n\oplus b_n$), erhalten wir:

$a_s\oplus b_s$ ist halbeinfach und $a_n\oplus b_n$ ist lokal nilpotent.

Außerdem gilt

$$a\oplus b = a_s\oplus b_s + a_n\oplus b_n$$

denn für $x \in V$ und $y \in W$ ist

$$\begin{aligned}(a_s\oplus b_s + a_n\oplus b_n)(x,y) &= (a_s\oplus b_s)(x,y) + (a_n\oplus b_n)(x,y)\\ &= (a_s(x), b_s(y)) + (a_n(x),b_n(y))\\ &= (a_s(x) + a_n(x), b_s(y) + b_n(y))\\ &= (a(x), b(y))\\ &= (a\oplus b)(x,y).\end{aligned}$$

Nach (iii) reicht es zu zeigen, daß $a_s\oplus b_s$ und $a_n\oplus b_n$ kommutieren. Das ist aber der Fall, denn für $x \in V$ und $y \in W$ gilt

$$\begin{aligned}((a_s\oplus b_s)\circ(a_n\oplus b_n))(x,y) &= (a_s\oplus b_s)(a_n(x),b_n(y))\\ &= (a_s(a_n(x)), b_s(b_n(y))\\ &= (a_n(a_s (x)), b_n(b_s(y)) \quad (a_s \text{ und } a_n \text{ bzw. } b_s \text{ und } b_n \text{ kommutieren})\\ &= (a_n\oplus b_n)(a_s(x),b_s(y))\\ &= ((a_n\oplus b_n)\circ(a_s\oplus b_s))(x,y).\end{aligned}$$

2. Schritt. Beweis der Behauptung.

Für jedes $x \in V$ gilt

$$\begin{aligned}a_s(x) &= (a\oplus b)_s|_V(x) && \text{(weil (6) die Jordan-Zerlegung von a ist, vgl. (v))}\\ &= (a\oplus b)_s(i(x)) && \text{(wir identifizieren V mit seinem Bild bei i)}\end{aligned}$$

$= (a_s \oplus b_s)(x, \varphi(x))$ (Definition von i)

$= (a_s(x), b_s(\phi(x)))$

Dabei haben wir $a_s(x)$ mit seinem Bild bei i identifiziert, d.h. genauer bedeutet diese Identität,

$$i(a_s(x)) = (a_s(x), b_s(\phi(x))) \text{ für jedes } x \in V,$$

d.h.

$$(a_s(x), \phi(a_s(x))) = (a_s(x), b_s(\phi(x))).$$

Insbesondere ist also

$$\phi(a_s(x)) = b_s(\phi(x)) \text{ für jedes } x \in V,$$

d.h. wie behauptet ist

$$\phi \circ a_s = b_s \circ \phi.$$

Damit besteht die erste behauptete Identiät. Die analgoge Rechnung mit a_n anstelle von a_s führt zur zweiten: für jedes $x \in V$ gilt

$a_n(x) = (a \oplus b)_n|_V(x)$ (weil (6) die Jordan-Zerlegung von a ist, vgl. (v))

$= (a \oplus b)_n(i(x))$ (wir identifizieren V mit seinem Bild bei i)

$= (a_n \oplus b_n)(x, \varphi(x))$ (Definition von i)

$= (a_n(x), b_n(\phi(x)))$

Dabei haben wir $a_n(x)$ mit seinem Bild bei i identifiziert, d.h. genauer bedeutet diese Identität,

$$i(a_n(x)) = (a_n(x), b_n(\phi(x))) \text{ für jedes } x \in V,$$

d.h.

$$(a_n(x), \phi(a_n(x))) = (a_n(x), b_n(\phi(x))).$$

Insbesondere ist also

$$\phi(a_n(x)) = b_n(\phi(x)) \text{ für jedes } x \in V,$$

d.h. wie behauptet ist

$$\phi \circ a_n = b_n \circ \phi.$$

Zu (vii). Für jeden endlich-dimensionalen a-stabilen Unterraum $W \subseteq V$ haben wir die multiplikative Jordan-Zerlegung

$$a|_W = (a|_W)_s \cdot (a|_W)_u .$$

Für je zwei solche Unterräume, sagen wir W' und W" können wir die zugehörigen Zerlegungen

$$a|_{W'} = (a|_{W'})_s \cdot (a|_{W'})_u \text{ und } a|_{W''} = (a|_{W''})_s \cdot (a|_{W''})_u$$

auf dem Durchschnitt $W' \cap W''$ betrachten und erhalten so die zugehörige Zerlegung für $a|_{W' \cap W''}$ (weil dies für die additiven Zerlegungen gilt - vgl. 2.4.4 (iii) - und die additiven und multiplikativen Zerlegungen für umkehrbare Matrizen durch einfache Umformungen auseinander hervorgehen). Wegen der Eindeutigkeit der Jordan-Zerlegung (im endlich-dimensionalen Fall) folgt

$$(a|_{W'})_s|_{W' \cap W''} = (a|_{W' \cap W''})_s = (a|_{W''})_s|_{W' \cap W''}$$

und

$$(a|_{W'})_u|_{W'\cap W''} = (a|_{W'\cap W''})_u = (a|_{W''})_u|_{W'\cap W''}$$

Mit anderen Worten: durchläuft W die endlich-dimensionalen a-stabilen Unterräume von V, so stimmen je zwei der Abbildungen

$$(a|_W)_s \text{ bzw. } (a|_W)_u$$

auf dem gemeinsamen Teil ihrer Definitionsbereiche überein. Sie lassen sich also zu einer auf ganz V definierten k-linearen Abbildung

$$a_s \text{ bzw. } a_u$$

verheften mit

$$a_s|_W = (a|_W)_s \text{ bzw. } a_u|_W = (a|_W)_u$$

für jeden a-stabilen k-linearen Unterraum $W \subseteq V$ von endlicher Dimension. Insbesondere sind a_s und a_u lokal endlich, a_s ist halbeinfach und a_u lokal unipotent, und es gilt

$$a = a_s \bullet a_u = a_u \bullet a_s .$$

Sei eine weitere multiplikative Jordan-Zerlegung gegeben, sagen wir

$$a = a'_s \bullet a'_u = a'_u \bullet a'_s .$$

(mit a'_s und a'_u lokal endlich, a'_s halbeinfach und a'_u unipotent).
Wir schreiben

$$a = a'_s \bullet (1+ a'_u-1) = a'_s + a'_s(a'_u-1) = a'_s + a'_n$$

mit

$$a'_n = a'_s(a'_u-1)$$

Weil a'_s und a'_u kommutieren, kommutieren auch a'_s und a'_n. Außerdem ist deshalb a'_n lokal nilpotent. Damit ist

$$a = a'_s + a'_n$$

eine additive Jordan-Zerlegung, also eindeutig durch a bestimmt. Wegen

$$a'_u = a'^{-1}_s a'_n + 1$$

ist dann aber auch die multiplikative Zerlegung eindeutig festgelegt.
Damit ist der erste Teil der Behauptung bewiesen. Der zweite gilt nach Konstruktion zumindest für endlich-dimensionale k-lineare a-stabile Unterräume $W \subseteq V$. Im Fall

$$\dim W = \infty$$

gilt die Aussage zumindest für alle endlich-dimensionalen k-linearen a-stabilen Unterräume $W' \subseteq W$. Auf Grund der obigen Konstruktionen gilt sie dann aber auch für W.
Die Aussagen bezüglich der auf dem Faktorraum V/W induzierten Abbildungen ergeben sich in analoger Weise aus den entprechenden Aussagen von (v) bezüglich der additiven Jordan-Zerlegung.

Zu (viii). Sei $U \subseteq V\oplus W$ (bzw. $U\subseteq V\otimes W$)ein k-linearer Unterraum mit

$$\dim_k U < \infty \text{ und } (a\oplus b)(U) \subseteq U \text{ (bzw. } (a\otimes b)(U) \subseteq U).$$

Zum Beweis der Behauptung reicht es zu zeigen,

$$a\oplus b|_U = (a_s\oplus b_s)|_U \bullet (a_u\oplus b_u)|_U$$

ist die Jordan-Zerlegung von $a\oplus b|_U \in \mathbf{GL}(U)$

bzw.

$a\otimes b|_U = (a_s\otimes b_s)|_U \bullet (a_u\otimes b_u)|_U$

ist die Jordan-Zerlegung von $a\oplus b|_U \in \mathbf{GL}(U)$.

Weil die Dimension von U endlich ist, gibt es endlich-dimensionale k-lineare Unterräume

$V' \subseteq V$ und $W' \subseteq W$ mit $U \subseteq V'\oplus W'$ (bzw. $U \subseteq V'\otimes W'$).

Weil V' und W' endlich-dimensional sind (und a, b lokal endlich), können wir diese Räume soweit vergrößern, daß außerdem gilt

V' ist a-stabil und W' ist b-stabil.

Nach dem zweiten Teil von (vii) sind

$$a|_{V'} = (a_s|_{V'})(a_u|_{V'}) \text{ und } b|_{W'} = (b_s|_{W'})(b_u|_{W'})$$

die Jordan-Zerlegungen von $a|_{V'}$ und $b|_{W'}$. Wir wenden 2.4.6 an und erhalten die Jordan-Zerlegungen für die direkte Summe und das Tensorprodukt von $a|_{V'}$ und $b|_{W'}$:

$$\begin{aligned}(a\oplus b)|_{V'\oplus W'} &= (a|_{V'})\oplus(b|_{W'}) = (a_s|_{V'})\oplus(b_s|_{W'})\bullet(a_u|_{V'})\oplus(b_u|_{W'})\\ &= (a_s\oplus b_s)|_{V'\oplus W'}\bullet(a_u\oplus b_u)|_{V'\oplus W'}\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}(a\otimes b)|_{V'\otimes W'} &= (a|_{V'})\otimes(b|_{W'}) = (a_s|_{V'})\otimes(b_s|_{W'})\bullet(a_u|_{V'})\otimes(b_u|_{W'})\\ &= (a_s\otimes b_s)|_{V'\otimes W'}\bullet(a_u\otimes b_u)|_{V'\otimes W'}\end{aligned}$$

Nach 2.4.4 (iii) sind additive Jordan-Zerlegungen im endlich-dimensionalen Fall verträglich mit Einschränkungen auf stabile k-lineare Unterräume. Das gilt dann aber auch für multiplikative Jordan-Zerlegungen. Deshalb ist

$(a\oplus b)|_U = (a_s\oplus b_s)|_U\bullet(a_u\oplus b_u)|_U$

bzw.

$(a\otimes b)|_U = (a_s\otimes b_s)|_U\bullet(a_u\otimes b_u)|_U$

eine Jordan-Zerlegung der Einschränkung von $a\oplus b$ bzw. $a\otimes b$ auf U. Da dies für alle k-linearen Unterräume U von $V\oplus W$ (bzw. $V\otimes W$) gilt mit

$\dim_k U < \infty$ und $(a\oplus b)(U) \subseteq U$ (bzw. $(a\otimes b)(U) \subseteq U$).

erhalten wir auf Grund der Konstruktion der multiplikativen Jordan-Zerlegung in (vii), daß

$a\oplus b = (a_s\oplus b_s)\bullet(a_u\oplus b_u)$

bzw.

$a\otimes b = (a_s\otimes b_s)\bullet(a_u\otimes b_u)$

die Jordan-Zerlegungen von $a\oplus b$ und $a\otimes b$ sind.

QED.

Beispiel

Seien G eine lineare algebraische Gruppe, A := k[G] und $g \in G$. Dann ist die Rechtstranslation mit g,

$$\rho(g): A \longrightarrow A,\ f(x) \mapsto f(xg)$$

(vgl. 2.3.6.B), ein lokal endlicher linearer Automorphismus von A (nach 3.3.9 Aufgabe 1). Damit besitzt $\rho(g)$ eine Jordan-Zerlegung

$$\rho(g) = \rho(g)_s\bullet\rho(g)_u$$

2.4.8 Satz: Jordan-Zerlegung in linearen algebraischen Gruppen
Sei G eine lineare algebraische Gruppe. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) Jordan-Zerlegung in G. Für jedes $g \in G$ gibt es genau ein Paar (g_s, g_u) von Elementen aus G mit den folgenden Eigenschaften.
   1. $g = g_s \bullet g_u = g_u \bullet g_s$
   2. $\rho(g_s) = \rho(g)_s$ und $\rho(g_u) = \rho(g)_u$.

(ii) Für jeden Homomorphismus $\phi: G \longrightarrow G'$ von algebraischen Gruppen und jedes $g \in G$ gilt
$$\phi(g_s) = \phi(g)_s \text{ und } \phi(g_u) = \phi(g)_u.$$

(iii) Für $g \in G = GL_n$ sind g_s und g_u gerade die halbeinfachen bzw. unipotenten Teile von g (im Sinne der Bemerkung von 2.4.5 mit $V = k^n$).

Bemerkung
Ein Element g einer linearen algebraischen Gruppe G heißt halbeinfach (bzw. unipotent), wenn $g = g_s$ bzw. $g = g_u$ gilt. Die zu $g \in G$ gehörigen Elemente g_s und g_u von (i) heißen halbeinfacher Teil bzw. unipotenter Teil des Elements $g \in G$. Ein Element $g \in G$ heißt halbeinfach bzw unipotent

Beweis. Zu (i).1. Schritt. Beweis der Existenz gewisser Elemente g_s und g_u von G. Seien
$$A := k[G]$$
der Koordinatenring von G und
$$m: A\otimes A \longrightarrow A, \alpha\otimes\beta \mapsto \alpha\bullet\beta,$$
der k-Algebra-Homomorphismus, welcher durch die Multiplikation der Algebra induziert wird. Für jedes $g \in G$ kommutiert der lokal endliche Endomorphismus
$$\rho(g): A \longrightarrow A, f(x) \mapsto f(xg)$$
(vgl. 2.3.6.B) mit m,
$$m\circ(\rho(g)\otimes\rho(g)) = \rho(g)\circ m.$$[18]

---

[18] Nach Definitioin ist $\rho: G \longrightarrow \mathbf{GL}(k[G])$ die zur Operation
$$a: G \times G \longrightarrow G, (g,x) \mapsto x\bullet g^{-1},$$
von G auf sich durch Rechtstranslationen gehörige Darstellung der abstrakten Gruppe G im Koordinatenring k[G] (vgl. 2.3.6 A), d.h.
$$(\rho(g)f)(x) = f(a(g^{-1},x)) = f(xg) \text{ für } f \in k[G] \text{ und } g,x \in G.$$
Deshalb gilt für $g\in G$, $f',f''\in k[G]$ und $x\in G$:
$$\begin{aligned} m((\rho(g)\otimes\rho(g))(f'\otimes f''))(x) &= m((\rho(g)f')\otimes(\rho(g)f''))(x) \\ &= ((\rho(g)f')\bullet(\rho(g)f''))(x) \\ &= (\rho(g)f')(x)\bullet(\rho(g)f'')(x) \\ &= f'(xg)\bullet f''(xg) \\ &= (f'\bullet f'')(xg) \\ &= (\rho(g)(f'\bullet f''))(x). \end{aligned}$$
Das dies für jedes $x\in G$ gilt, folgt
$$m((\rho(g)\otimes\rho(g))(f'\otimes f'')) = \rho(g)(f'\bullet f'') = \rho(g)(m(f'\otimes f'')),$$

Nach Bemerkung 2.4.7 (vi) kommutiert m auch mit den halbeinfachen Teil und den nilpotenten und unipotenten Teilen:

$$m\circ(\rho(g)_s\otimes\rho(g)_s) = \rho(g)_s\circ m \text{ und } m\circ(\rho(g)_u\otimes\rho(g)_u) = \rho(g)_u\circ m$$

Man beachte, nach Bemerkung 2.4.7 (viii) ist

$$(\rho(g)\otimes\rho(g))_s = \rho(g)_s\otimes\rho(g)_s \text{ und } (\rho(g)\otimes\rho(g))_u = \rho(g)_u\otimes\rho(g)_u.$$

Damit ist nicht nur $\rho(g)$ ein k-Algebra-Homomorphismus, sondern auch $\rho(g)_s$ und $\rho(g)_u$. Die Zusammensetzungen mit der Auswertung im Einselement,

$$A \xrightarrow{\rho(g)_s} A \longrightarrow k,\ f \mapsto \rho(g)_s f \mapsto (\rho(g)_s f)(e),$$

$$A \xrightarrow{\rho(g)_u} A \longrightarrow k,\ f \mapsto \rho(g)_u f \mapsto (\rho(g)_u f)(e),$$

sind damit auch k-Algebra-Homomorphismen, definieren also Punkte g_s, $g_u \in G$ mit

$$(\rho(g)_s(f))(e) = f(g_s) \text{ und } (\rho(g)_u(f))(e) = f(g_u) \text{ für jedes } f \in A. \tag{1}$$

2. <u>Schritt</u>. Die durch (1) definierten Punkte g_s und g_u haben die in (i) angegebenen Eigenschaften.

Die Operation von G auf sich durch Linkstranslationen,

$$L: G \times G \longrightarrow G,\ (g, x) \mapsto g\bullet x,$$

kommutiert mit der durch Rechstranslationen (d.h. $g'\bullet(x\bullet g'') = (g'\bullet x)\bullet g''$). Deshalb kommutiert die auf dem Koordinatenring induzierte Operation

$$\lambda(g): A \longrightarrow A,\ f \mapsto \lambda(g)f \text{ mit } (\lambda(g)f)(x) = f(L(g^{-1},x)) = f(g^{-1}x),$$

mit der durch Rechtstranslationen induzierten,

$$\lambda(g')\circ\rho(g'') = \rho(g'')\circ\lambda(g') \text{ für } g',g''\in G.$$

Nach Bemerkung 2.4.7 (vi) kommutiert $\lambda(g')$ mit den halbeinfachen und unipotenten Teilen von $\rho(g'')$. Für $g,x \in G$ und $f\in A$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
(\rho(g)_s f)(x) &= (\lambda(x^{-1})(\rho(g)_s f))(e) && \text{(nach Definition von } \lambda)\\
&= \rho(g)_s(\lambda(x^{-1})f)(e) && (\rho(g) \text{ und } \lambda(x) \text{ kommutieren})\\
&= (\lambda(x^{-1})f)(g_s) && \text{(nach (1) mit } \lambda(x^{-1})f \text{ anstelle von f)}\\
&= f(xg_s) && \text{(nach Definition von } \lambda)\\
&= (\rho(g_s)f)(x)
\end{aligned}$$

also ist $\rho(g)_s f = \rho(g_s)f$ für jedes $f\in A$, also

$$\rho(g)_s = \rho(g_s).$$

Dieselbe Rechnung mit dem unipotenten Teil von $\rho(g)$ anstelle des halbeinfachen zeigt

$$\rho(g)_u = \rho(g_u).$$

Die Elementen g_s und g_u genügen also der Bedingung 2 von (i).

Die multiplikative Jordan-Zerlegung

---

also

$$m\circ(\rho(g)\otimes\rho(g)) = \rho(g)(f'\bullet f'') = \rho(g)\circ m.$$

$$\rho(g) \quad = \rho(g)_s \cdot \rho(g)_u = \rho(g)_u \cdot \rho(g)_s$$

von ρ(g) läßt sich deshalb in der Gestalt

$$\rho(g) \quad = \rho(g_s) \cdot \rho(g_u) = \rho(g_u) \cdot \rho(g_s)$$

schreiben. Weil $\rho: G \longrightarrow GL(k[G])$ ein Gruppen-Homomorphismus ist, folgt

$$\rho(g) \quad = \rho(g_s \cdot g_u) = \rho(g_u \cdot g_s).$$

Nach 2.3.6 B ist der Gruppen-Homomorphismus ρ injektiv, d.h. es gilt

$$g \quad = g_s \cdot g_u = g_u \cdot g_s.$$

Die Elementen g_s und g_u genügen der Bedingung 1 von (i).

3. Schritt. Es gilt auch die Eindeutigkeitsaussage von (i).
Wegen der Eindeutigkeit der Jordan-Zerlegung in **GL**(k[G]) (vgl. Bemerkung 2.4.7 (vii)) sind $\rho(g)_s$ und $\rho(g)_u$ eindeutig festgelegt durch g. Weil ρ injektiv ist, sind damit auch g_s und g_u eindeutig bestimmt.

Zu (ii). Ein Homomorphismus $\phi: G \longrightarrow G'$ von algebraischen Gruppen läßt sich zerlegen in eine Surjektion auf das Bild von φ gefolgt von einer natürlichen Einbettung,

$$G \xrightarrow{\psi} \mathrm{Im}(\phi) \overset{i}{\hookrightarrow} G'$$

Nach 2.2.5(ii) ist Im(φ) eine abgeschlossene Untergruppe von G'. Deshalb reicht es, die Aussage für ψ und i zu beweisen, denn dann ist auch

$$\phi(g_s) = i(\psi(g_s)) = i(\psi(g)_s) = i(\psi(g))_s = \phi(g)_s$$

und analog folgt $\phi(g_u) = \phi(g)_u$. Betrachten wir also die Spezialfälle, daß φ eine natürliche Einbettung bzw. eine Surjektion ist.

1. Fall: $\phi: G \hookrightarrow G'$ ist die natürlichen Einbettung der abgeschlossenen Untergruppe G von G'.

Sei I = I(G) das Ideal von G im Koordinatenring von G', d.h.

$$k[G] = k[G]/I.$$

Nach 2.3.8 ist

$$G = \{g' \in G' \mid \rho(g')I = I\}.$$

Insbesondere ist I ist ein ρ(g)-stabiler k-linearer Unterraum von k[G'] für jedes $g \in G$.
Nach Bemerkung 2.4.7 (vii) erhält man dann aus der Jordan-Zerlegung

$$\rho(g') = \rho(g')_s \cdot \rho(g')_n \text{ , } g' := \phi(g)$$

von ρ(g') in k[G'] die Jordan-Zerlegung der durch ρ(g') auf dem Faktorraum induzierten Abbildung, indem man auf beiden Seiten zu den induzierten Abbildungen des Faktorraums übergeht, d.h. es ist

$$\left(\overline{\rho(g')}\right)_s = \overline{\rho(g')_s} \text{ und } \left(\overline{\rho(g')}\right)_u = \overline{\rho(g')_u}$$

Wir erhalten so kommutative Diagramme

$$\begin{tikzcd} k[G] \arrow[r, "(\overline{\rho(g')})_s"] & k[G] \\ k[G'] \arrow[u, two heads, "\phi^*"] \arrow[r, "\rho(g')_s"] & k[G'] \arrow[u, two heads, "\phi^*"'] \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} k[G] \arrow[r, "(\overline{\rho(g')})_u"] & k[G] \\ k[G'] \arrow[u, two heads, "\phi^*"] \arrow[r, "\rho(g')_u"] & k[G'] \arrow[u, two heads, "\phi^*"'] \end{tikzcd} \tag{2}$$

Nun ist ϕ ein Gruppen-Homomorphismus, d.h. für $x, g \in G$ gilt

$$\phi(R_{g^{-1}}x) = \phi(xg) = \phi(x)\bullet\phi(g) = R_{\phi(g)^{-1}}(\phi(x)),$$

also

$$\phi\circ R_{g^{-1}} = R_{\phi(g)^{-1}}\circ\phi,$$

also

$$\begin{aligned} \rho(g)\circ\phi^* &= R^*_{g^{-1}}\circ\phi^* = (\phi\circ R_{g^{-1}})^* \\ &= (R_{\phi(g)^{-1}}\circ\phi)^* \\ &= \phi^*\circ R^*_{\phi(g)^{-1}} \\ &= \phi^*\circ\rho(\phi(g)) \\ &= \phi^*\circ\rho(g') \end{aligned}$$

Damit ist das folgende Diagramm kommutativ.

$$\begin{tikzcd} k[G] \arrow[r, "\rho(g)"] & k[G] \\ k[G'] \arrow[u, two heads, "\phi^*"] \arrow[r, "\rho(g')"] & k[G'] \arrow[u, two heads, "\phi^*"'] \end{tikzcd}$$

Das bedeutet, $\rho(g)$ ist gerade die durch $\rho(g')$ auf dem Faktorraum induzierte Abbildung $\overline{\rho(g')}$. Die kommutativen Diagramme (2) bekommen so die Gestalt

$$\begin{tikzcd} k[G] \arrow[r, "\rho(g)_s"] & k[G] \\ k[G'] \arrow[u, two heads, "\phi^*"] \arrow[r, "\rho(\phi(g))_s"] & k[G'] \arrow[u, two heads, "\phi^*"'] \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} k[G] \arrow[r, "\rho(g)_u"] & k[G] \\ k[G'] \arrow[u, two heads, "\phi^*"] \arrow[r, "\rho(\phi(g))_u"] & k[G'] \arrow[u, two heads, "\phi^*"'] \end{tikzcd}$$

In den nachfolgenden Rechungen tritt der Index ξ auf, welcher gleich s oder gleich u sein kann, d.h. diese Rechnungen gelten gleichermaßen für den halbeinfachen Teil (ξ=s) wie auch für den unipotenten Teil (ξ=u).

Für $f' \in k[G']$ und $x\in G$ ist

$$\begin{aligned} \rho(g)_\xi(\phi^*(f'))(x) &= \rho(g)_\xi(f'|_G) && \text{(}\phi^*\text{ ist die Einschränkung auf G)} \\ &= \rho(g_\xi)\,(f'|_G) && \text{(nach Definition von } g_\xi\text{)} \\ &= f'(x\bullet g_\xi) && \text{(nach Definition von } \rho\text{)} \end{aligned}$$

und mit $g' := \phi(g)$:

$$\phi^*(\rho(g')_\xi(f'))(x) = (\rho(g')_\xi f')(x) \text{ (}\phi^*\text{ ist die Einschränkung auf G und } x\in G\text{)}$$

$= (\rho(g'_\xi)\, f')(x)$ (Definition von g_ξ)
$= f'(x\bullet g'_\xi)$

Dabei ist $\rho(g')$ die Rechtstranslation auf k[G'], d.h. $\rho(g')_\xi$ ist der halbeinfache bzw. unipotente Teil der Rechtstranslation $\rho(g')$ auf k[G'] und g'_ξ der halbeinfache bzw. unipotene Teil von g' in G'.

Wegen der Kommutativität des linken bzw. rechten Vierecks ist für jedes $x \in G$ und jedes $f' \in k[G']$

$$f'(x\bullet g_\xi) = f'(x\bullet g'_\xi).$$

Speziel für x = e folgt

$$f'(g_\xi) = f'(g'_\xi).$$

Weil dies für jedes $f' \in k[G']$ gilt (also insbesondere für die Koordinaten der beiden Punkte), folgt

$$g_\xi = g'_\xi = \phi(g)_\xi.$$

Weil $\phi: G \hookrightarrow G'$ die natürliche Einbettung ist, d.h. die identische Abbildung auf G, können wir diese Identität auch in der Gestalt

$$\phi(g_\xi) = \phi(g)_\xi$$

schreiben. Damit gilt

$$\phi(g_s) = \phi(g)_s \text{ und } \phi(g_u) = \phi(g)_u$$

wie behauptet.

2. <u>Fall</u>: $\phi: G \twoheadrightarrow G'$ ist surjektiv.

Die induzierte Abbildung auf den Koordinatenringen

$$\phi^*: k[G'] \hookrightarrow k[G]$$

ist injektiv. Weil ϕ ein Gruppen-Homomorphismus ist, gilt

$$\phi(xg) = \phi(x)\bullet\phi(g) \qquad \text{für } x, g \in G,$$

also

$$\phi\circ R_g^{-1} = R_{\phi(g)}^{-1}\circ\phi,$$

also

$$\rho(g)\circ\phi^* = \phi^*\circ\rho(\phi(g)).$$

Wir erhalten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} k[G] & \xrightarrow{\rho(g)} & k[G] \\ \phi^* \uparrow & & \phi^* \uparrow \\ k[G'] & \xrightarrow{\rho(\phi(g))} & k[G'] \end{array}$$

sodaß wir k[G'] als $\rho(g)$-stabilen linearen Unterraum von k[G] betrachten können (mit der Einschränkung $\rho(\phi(g))$ auf k[G']). Nach Bemerkung 2.4.7 (vii) erhält aus der multipliktiven Jordan-Zerlegung

$$\rho(g) = \rho(g)_s\bullet\rho(g)_u$$

die Jordan-Zerlegung von $\rho(\phi(g))$ indem man die beiden Faktoren auf der rechten Seite auf k[G'] einschränkt:

$$\rho(\phi(g))_s = \rho(g)_s|_{k[G']} \text{ und } \rho(\phi(g))_u = \rho(g)_u|_{k[G']}.$$

Analog zum ersten Fall erhalten wir kommutative Diagramme

$$\begin{array}{ccc} k[G] & \xrightarrow{\rho(g)_s} & k[G] \\ \phi^*\uparrow & & \phi^*\uparrow \\ k[G'] & \xrightarrow{\rho(\phi(g))_s} & k[G'] \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} k[G] & \xrightarrow{\rho(g)_u} & k[G] \\ \phi^*\uparrow & & \phi^*\uparrow \\ k[G'] & \xrightarrow{\rho(\phi(g))_u} & k[G'] \end{array}$$

Die analogen Rechnungen wie am Ende des ersten Falls zeigen, es gilt

$$\phi(g_s) = \phi(g)_s \text{ und } \phi(g_u) = \phi(g)_u.$$

Genauer, für $f' \in k[G']$ und $x \in G$ ist

$$\begin{aligned} \rho(g)_\xi(\phi^*(f'))(x) &= (\rho(g)_\xi(f'\circ\phi))(x) && \text{(Definition von } \phi^*) \\ &= (\rho(g_\xi)(f'\circ\phi))(x) && \text{(nach Definition von } g_\xi) \\ &= f'(\phi(x\bullet g_\xi)) && \text{(nach Definition von } \rho) \end{aligned}$$

und mit $g' := \phi(g)$:

$$\begin{aligned} \phi^*(\rho(g')_\xi(f'))(x) &= (\rho(g')_\xi f')(\phi(x)) && \text{(Definition von } \phi^*) \\ &= (\rho(g'_\xi)\, f')(\phi(x)) && \text{(Definition von } g_\xi) \\ &= f'(\phi(x)\bullet g'_\xi) \end{aligned}$$

Wegen der Kommutativität des linken bzw. rechten Vierecks ist für jedes $x \in G$ und jedes $f' \in k[G']$

$$f'(\phi(x\bullet g_\xi)) = f'(\phi(x)\bullet g'_\xi),$$

also

$$\phi(x\bullet g_\xi) = \phi(x)\bullet g'_\xi \text{ für jedes } x \in G.$$

Speziell für x = e erhalben wir (weil ϕ ein Homomorphismus ist)

$$\phi(g_\xi) = g'_\xi = \phi(g)_\xi \text{ für } \xi = s \text{ und } \xi = u.$$

<u>Zu (iii)</u>. Seien

$$G := GL(V) \text{ mit } V := k^n$$

und

$$f: V \longrightarrow k$$

eine von 0 verschiedene Linearform. Weil das Standard-Skalarprodukt $<,>$ des k^n nicht entartet ist, d.h.

$$V \longrightarrow Hom_k(V, k),\ v \mapsto <v, ?>$$

ist ein Isomorphismus, hat f die Gestalt

$$f(x) = <v_f, x> = v_f^T \bullet x \text{ (Matrizen-Produkt)}$$

mit einem Vektor $v_f \in V - \{0\}$. Wir betrachten die Abbildung

$$\tilde{f}: V \longrightarrow k[G],\ v \mapsto (\, g \mapsto f(gv)\,).$$

Die Abbildung ist wohldefiniert, denn

$$f(gv) = v_f^T \bullet g \bullet v$$

ist eine lineare Funktion der Einträge der Matrix $g \in G = \mathbf{GL}(V) = \mathbf{GL}(k^n) = \mathbf{GL}_n$,

also für jedes feste $v \in V$ eine reguläre Funktion auf G. Außerdem ist $\tilde{f}(v) = v_f^T \bullet g \bullet v$ eine lineare Funktion von v,

$$\tilde{f}: V \longrightarrow k[G] \text{ ist linear.}$$

Für $v \in \mathrm{Ker}(\tilde{f})$ gilt $v_f^T \bullet g \bullet v = 0$ für beliebige $g \in G$. Da $v_f \neq 0$ ist, gibt es für jedes i ein $g_i \in G$ mit $v_f^T \bullet g_i = e_i^T$. Es gilt also $e_i^T \bullet v = 0$, d.h. die i-te Koordinate von v ist 0. Da dies für alle i gilt, ist $v = 0$. Wir haben gezeigt, $\mathrm{Ker}(\tilde{f})$ ist trivial, d.h.

$$\tilde{f}: V \hookrightarrow k[G] \text{ ist injektiv.}$$

Wir können V als k-linearen Unterraum von k[G] ansehen. Für beliebige $v \in V$ und beliebige $g,x \in G$ gilt

$$\tilde{f}(gv)(x) = f(xgv) = \tilde{f}(v)(xg) = (\rho(g)\tilde{f}(v))(x)$$

also

$$\tilde{f}(gv) = \rho(g)\tilde{f}(v),$$

d.h. das folgene Diagramm ist kommutativ

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\tilde{f}} & k[G] \\ g\uparrow & & \uparrow\rho(g) \\ V & \xrightarrow{\tilde{f}} & k[G] \end{array}$$

für jedes $g \in G$, d.h. V ist ein $\rho(g)$-stabiler k-linearer Unterraum von k[G] und die Einschränkung von $\rho(g)$ auf V ist g. Nach Bemerkung 2.4.7 (vii) erhält man aus der Jordan-Zerlegung

$$\rho(g) = \rho(g)_s \bullet \rho(g)_u$$

von $\rho(g)$ durch Enschränken der Abbildungen auf V die Jordan-Zerlegung von g, d.h.

$$g_s = \rho(g)_s|_V \text{ und } g_u = \rho(g)_u|_V ,$$

Dabei sind g_s und g_u die gewöhnlichen halbeinfachen bzw. unipotenten Teile der Matrix g im Sinne von 2.4.1 und der Bemerkung von 2.4.5, und $\rho(g)_s$, $\rho(g)_u$ sind diejenigen im Sinne von 2.4.7. Um sie von den halbeinfachen bzw lokal unipotenten Teilen von 2.4.8 zu unterscheiden wollen wir sie im verbleibenden Teil des Beweises mit $g_{s'}$, bzw $g_{u'}$, bezeichnen.

Wir haben hier V mit dem Bild von V bei $\tilde{f}$ identifiziert. Ohne die Identifizierung gilt

$$\tilde{f}\circ g_{s'} = \rho(g)_{s'}\circ\tilde{f} \text{ und } \tilde{f}\circ g_{u'} = \rho(g)_{u'}\circ\tilde{f},$$

d.h. für jedes $v \in V$ und jedes $x \in G$ ist

$$
\begin{aligned}
f(x\cdot g_{s'}\cdot v) &= \tilde{f}(g_{s'}\cdot v)(x) && \text{(Definition von } \tilde{f}\text{)}\\
&= ((\tilde{f}\circ g_{s'})(v))(x) \\
&= ((\rho(g)_{s'}\circ\tilde{f})(v))(x) && \text{(nach 2.4.7(vi))}\\
&= (\rho(g)_{s'}\tilde{f}(v))(x) \\
&= (\rho(g_s)\tilde{f}(v))(x) && \text{(Definition von } g_s\text{)}\\
&= (\tilde{f}(v))(x\cdot g_s) && \text{(Definition von } \rho\text{)}\\
&= f(x\cdot g_s\cdot v). && \text{(Definition von } \tilde{f}\text{)}
\end{aligned}
$$

Die analoge Rechnung mit den lokal unipotenten Teil liefert das analoge Ergebnis. Zusammen gilt

$$f(x\cdot g_{s'}\cdot v) = f(x\cdot g_s\cdot v) \text{ und } f(x\cdot g_{u'}\cdot v) = f(x\cdot g_u\cdot v)$$

für beliebige $x \in G$, $v \in V$ und $f \in \mathrm{Hom}_k(V, k)$. Insbesondere können wir für f die Koordinatenfunktionen x_i einsetzen. Wir erhalten

$$x\cdot g_{s'}\cdot v = x\cdot g_s\cdot v \text{ und } x\cdot g_{u'}\cdot v = x\cdot g_u\cdot v$$

und speziell für $x = e$

$$g_{s'}\cdot v = g_s\cdot v \text{ und } g_{u'}\cdot v = g_u\cdot v.$$

Für v können wir den i-ten Standard-Einheitsvektor einsetzen und erhalten die Gleichheit der i-ten Spalten der Matrizen. Da dies für jedes i gilt, folgt

$$g'_s = g_s \text{ und } g'_u = g_u.$$

Mit anderen Worten g_s und g_u stimmen mit dem halbeinfachen bzw. unipotenten Teil der Matrix g im Sinne der Bemerkung von 2.4.5 überein.
QED.

2.4.9 Folgerung: Kriterium für halbeinfache und unipotente Elmente

Seien G eine lineare algebraische Gruppe und $g \in G$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) g ist halbeinfach (bzw unipotent).

(ii) Es gibt eine natürliche Zahl n und einen Isomorphismus $\phi: G \xrightarrow{\cong} G' \subseteq \mathbf{GL}_n$ von G mit einer abgeschlossenen Untergruppe von $\mathbf{GL}_n$ mit $\phi(g)$ halbeinfach (bzw. unipotent).

(iii) Für jeden Isomorphismus $\phi: G \xrightarrow{\cong} G' \subseteq \mathbf{GL}_n$ von G mit einer abgeschlossenen Untergruppe von $\mathbf{GL}_n$ ist $\phi(g)$ halbeinfach (bzw. unipotent).

Beweis. <u>(i) ⇒ (iii)</u>.
Ist g halbeinfach, so ist $g = g_s$, also

$$
\begin{aligned}
\phi(g) &= \phi(g_s)\\
&= \phi(g)_s \qquad \text{(nach 2.4.8 (ii)),}
\end{aligned}
$$

d.h. $\phi(g)$ ist halbeinfach.
Ist g unipotent, so ist $g = g_u$, also

$$\begin{aligned}\phi(g) &= \phi(g_u)\\ &= \phi(g)_u \qquad \text{(nach 2.4.8 (ii))},\end{aligned}$$

d.h. $\phi(g)$ ist unipotent.
<u>(iii) ⇒ (ii)</u>.
Nach 2.3.7(i) gibt es eine natürliche Zahl n und einen Isomorphismus

$$\phi: G \xrightarrow{\cong} G' \subseteq \mathbf{GL}_n$$

von G mit einer abgeschlossenen Untergruppe von $\mathbf{GL}_n$. Nach Voraussetzung (iii) ist dann $\phi(g)$ halbeinfach bzw. unipotent.
<u>(ii) ⇒ (i)</u>. Sei

$$g = g_s \bullet g_u$$

die Jordan-Zerlegung im Sinne 2.4.8 (i). Wir wenden den nach (ii) existierenden Isomorphismus an und erhalten

$$\phi(g) = \phi(g_s)\bullet\phi(g_u)$$

Nach 2.4.8 (ii) ist dies gerade die Jordan-Zerlgung von $\phi(g)$.
Ist $\phi(g)$ halbeinfach, so gilt $\phi(g) = \phi(g_s)$, also $\phi(g_u) = e$. Weil ϕ ein Isomorphismus ist, folgt $g_u = e$, also $g = g_s$, d.h. g ist halbeinfach.
Ist $\phi(g)$ unipotent, so gilt $\phi(g) = \phi(g_u)$, also $\phi(g_s) = e$. Weil ϕ ein Isomorphismus ist, folgt $g_s = e$, also $g = g_u$, d.h. g ist unipotent.
QED.

2.4.10 Aufgaben

Wir verwenden die Bezeichnungen von 2.4.8.

Aufgabe 1

Seien G eine lineare algebraische Gruppe, $g \in G$ ein Element und

$$\lambda: G \longrightarrow GL(k[G])$$

(wie in 2.3.6.B) die Darstellung durch Linkstranslationen. Beweisen sie, es gilt

$$\lambda(g)_s = \lambda(g_s) \text{ und } \lambda(g)_u = \lambda(g_u).$$

Beweis. Sei G^{op} die Gruppe G mit der Multiplikation

$$x\bullet^{op} y := y\bullet x.$$

Die Gruppen-Struktur ist wieder durch Morphismen von affinen Varietäten definiert. Zum Beispiel ist die Multiplikation

$$\mu^{op}: G\times G \xrightarrow{\tau} G\times G \xrightarrow{\mu} G$$

von G^{op} die Zusammensetzung der Multiplikation μ von G mit dem Morphismus

$$\tau: G\times G \longrightarrow G\times G, (x,y) \mapsto (y,x),$$

der die Faktoren vertauscht. Der Übergang zun Inversen, wird dann zu einem Isomorphismus

$$i: G \longrightarrow G^{op} \text{ bzw. } i: G^{op} \longrightarrow G.$$

Für g, x ∈ G gilt

$$R_g(x) = x\bullet g^{-1} = (g\bullet x^{-1})^{-1} = i(L_g(x^{-1})) = (i\circ L_g\circ i)(x)$$

also

$$R_g \quad = i\circ L_g\circ i$$

also

$$R_g\circ i \quad = i\circ L_g \qquad \text{(i ist selbstinvers)}$$

also

$$R_{g^{-1}}\circ i = i\circ L_{g^{-1}}$$

also

$$\iota\circ\rho(g) = i^*\circ R^*_{g^{-1}} = (R_{g^{-1}}\circ i)^* = (i\circ L_{g^{-1}})^* = L^*_{g^{-1}}\circ i^* = \lambda(g)\circ\iota$$

Wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} k[G] & \xrightarrow{\rho(g)} & k[G] \\ \iota\downarrow & & \downarrow\iota \\ k[G^{op}] & \xrightarrow{\lambda(g)} & k[G^{op}] \end{array} \tag{1}$$

Nach Bemerkung 2.4.7 (vi) sind auch die folgenden Diagramme kommutativ.

$$\begin{array}{ccc} k[G] & \xrightarrow{\rho(g)_s} & k[G] \\ \iota\downarrow & & \downarrow\iota \\ k[G^{op}] & \xrightarrow{\lambda(g)_s} & k[G^{op}] \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} k[G] & \xrightarrow{\rho(g)_u} & k[G] \\ \iota\downarrow & & \downarrow\iota \\ k[G^{op}] & \xrightarrow{\lambda(g)_u} & k[G^{op}] \end{array}$$

Nach den Definitionen von g_s und g_u in 2.4.8(i) können wir diese Diagramm auch in der folgenden Gestalt schreiben.

$$\begin{array}{ccc} k[G] & \xrightarrow{\rho(g_s)} & k[G] \\ \iota\downarrow & & \downarrow\iota \\ k[G^{op}] & \xrightarrow{\lambda(g)_s} & k[G^{op}] \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} k[G] & \xrightarrow{\rho(g_u)} & k[G] \\ \iota\downarrow & & \downarrow\iota \\ k[G^{op}] & \xrightarrow{\lambda(g)_u} & k[G^{op}] \end{array} \tag{2}$$

Diese beiden Diagramme können wir (auf zwei Weisen) zu einem größeren Diagramm zusammensetzen, in dessen oberer Zeile $\rho(g_s)\bullet\rho(g_u)$ bzw. $\rho(g_u)\bullet\rho(g_s)$ steht (in beiden Fällen in der oberen Zeile also $\rho(g)$). Durch Vergleich mit (1) erhalten wir - weil ι ein Isomorphismus ist -

$$\lambda(g) = \lambda(g)_s\bullet\lambda(g)_u = \lambda(g)_u\bullet\lambda(g)_s \tag{3}$$

Ersetzen wir jetzt in (1) das Element g durch g_s. Weil die Jordan-Zerlegung von g_s die Gestalt $g_s = g_s\bullet e$ hat, bleibt dadurch das linke Diagramm (2) unverändert, während in der oberen Zeile des rechten Diagramms $\rho(e) = id$ steht. In der unteren Zeile des rechten Diagramm steht damit $\lambda(g_s)_u = id$. Die Identität (3) mit g_s anstelle von g hat also die Gestalt

$$\lambda(g_s) = \lambda(g)_s \bullet e = e \bullet \lambda(g)_s$$

Insbesondere gilt $\lambda(g_s) = \lambda(g)_s$.

Ersetzen wir schließlich in (1) das Element g durch g_u. Weil die Jordan-Zerlegung von g_u die Gestalt $g_u = e \bullet g_u$ hat, bleibt dadurch das rechte Diagramm (2) unverändert, während in der oberen Zeile des linken Diagramms $\rho(e) = id$ steht. In der unteren Zeile des linken Diagramm steht damit $\lambda(g_u)_s = id$. Die Identität (3) mit g_u anstelle von g hat also die Gestalt

$$\lambda(g_u) = e \bullet \lambda(g)_u = \lambda(g)_u \bullet e$$

Insbesondere gilt $\lambda(g_u) = \lambda(g)_u$.

QED.

Aufgabe 2

Sei G eine lineare algebraische Gruppe. Zeigen Sie, die Menge G_u der unipotenten Elemente von G ist abgeschlossen in G.

Beweis. Nach 2.3.7(i) können wir annehmen, G ist eine abgeschlossene Untergruppe einer $\mathbf{GL}_n$,

$$G \hookrightarrow \mathbf{GL}_n.$$

Nach 2.4.9 gilt

$$G_u = G \cap (\mathbf{GL}_n)_u.$$

Es reicht also zu zeigen, daß $(\mathbf{GL}_n)_u$. abgeschlossen ist in $\mathbf{GL}_n$, d.h. wir können annehmen,

$$G = \mathbf{GL}_n.$$

Nach 2.4.8 (iii) besteht dann G_u aus den Matrizen $a \in \mathbf{GL}_n$ für welche

$$a' := a-1$$

nilpotent ist,

$$G_u = \{1+a \in G \mid a^s = 0 \text{ für eine natürliche Zahl s }\}.$$

Sei a ein nilpotenter k-linearer Endomorphismus von $V = k^n$. Dann ist $a: V \longrightarrow V$ nicht surjektiv (denn dann wäre a ein Automorphismus von V und könnte unmöglich nilpotent sein). Deshalt ist a(V) echt enthalten in V,

$$a(V) \subset V, \dim a(V) < \dim V. \tag{1}$$

Zeigen wir durch Induktion nach der Dimension n von V, daß dann auf jeden Fall die n-te Potenz von a gleich 0 ist:

$$a^n = 0. \tag{2}$$

Induktionsanfang: n = 1.

Nach (1) ist dim a(V) < dim V = 1, also dim a(V) = 0, also a(V) = 0, also a = 0. Es gilt die Behauptung (1).

<u>Induktionsschritt</u>: n > 1.

Wegen $a(a(V)) \subseteq a(V)$ ist a(V) ein a-stabiler Unterraum und die Einschränkung von a auf a(V) ist ebenfalls nilpotent. Wegen dim a(V) < dim V gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$(a|_{a(V)})^{\dim a(V)} = 0$$

also wegen $\dim a(V) < \dim V = n$, d.h. $\dim a(V) \le n-1$ auch

$$(a|_{a(V)})^{n-1} = 0,$$

also $0 = a^{n-1}(a(V)) = a^n(V)$, also $a^n = 0$.

Damit ist (2) bewiesen. Es folgt

$$G_u = \{1+a \in G \mid a^n = 0\}$$
$$= \{a \in G \mid (a-1)^n = 0\}$$

Die Einträge der Matrix $(a-1)^n = 0$ sind Polynome in den Einträgen der Matrix a. Durch die Bedingung $(a-1)^n = 0$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von $G = \mathbf{GL}_n$ definiert.

QED.

Aufgabe 3

Zeigen Sie anhand von Beispielen, daß die Menge G_s der halbeinfachen Elemente einer linearen algebraischen Gruppe weder offen noch abgeschlossen sein muß.

Beweis. Nach 2.3.7(i) können wir annehmen, G ist eine abgeschlossene Untergruppe einer $\mathbf{GL}_n$,

$$G \hookrightarrow \mathbf{GL}_n.$$

Nach 2.4.9 gilt

$$G_s = G \cap (\mathbf{GL}_n)_s.$$

Ist die lineare algebraische Gruppe G eins der gesuchten Gegenbeispiele, d.h. ist G_s nicht offen (bzw. nicht abgeschlossen) in G, so kann auch $(\mathbf{GL}_n)_s$ nicht offen (bzw. nicht abgeschlossen) in $\mathbf{GL}_n$ sein. Wir sollten also die Gegenbeispiele unter den Gruppen G der Gestalt

$$G = \mathbf{GL}_n$$

suchen.

<u>Der Fall</u> n = 1:

Für jede 1×1-Matrix ist jeder von 0 verschiedene Vektor von $k^1 = k$ ein Eigenvektor. Jede Matrix von $\mathbf{GL}_1$ ist halbeinfach, d.h. es gilt

$$G_s = (\mathbf{GL}_1)_s = \mathbf{GL}_1 = G.$$

Die Menge G_s ist sowohl abgeschlossen als auch offen in G. Wir erhalten kein Gegenbeispiel.

<u>Der Fall</u> n = 2.

Betrachten wir die folgende abgeschlossene Teilmenge von $G = \mathbf{GL}_2$.

$$F := \{ a = (a_{ij}) \in G \mid a_{11}=a_{22}=1, a_{21} = 0 \} = \left\{\begin{pmatrix}1 & c\\ 0 & 1\end{pmatrix} \mid c \in k\right\}$$

Dies ist eine zur additiven Gruppe G_a isomorphe Untergruppe, denn es gilt

$$\begin{pmatrix}1 & c'\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & c''\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & c'+c''\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Wäre G_s offen in G, so wäre $G_s \cap F$ offen in $F \cong G_a \cong \mathbb{A}^1$. Wegen der Eindeutigkeit der Jordan-Zerlegung gilt aber

$$G_s \cap F \subseteq G_s \cap G_u = \{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\},$$

und die einpunktigen Mengen sind nicht offen in $\mathbb{A}^1$. Deshalb ist

$$G_s \text{ nicht offen in } G = \mathbf{GL}_2.$$

Zeigen wir, daß G_s auch nicht abgeschlossen in G ist. Dazu betrachten wir die Menge

$$U := \{ a \in G \mid a \text{ hat zwei verschiedene Eigenwerte } \}.$$

Weil 2×2-Matrizen mit linear unabhängigen Eigenvektoren halbeinfach sind, gilt

$$U \subseteq G_s \subseteq G$$

Es reicht zu zeigen,

$$U \text{ ist offen in } G = \mathbf{GL}_2, \tag{1}$$

denn als nicht-leere offene Teilmenge der irreduziblen Varietät $\mathbf{GL}_2$ liegt dann U dicht in G. Wäre G_s abgeschlossen, so würde

$$G = \overline{U} \subseteq G_s \subseteq G,$$

also $G_s = G$ gelten, was nicht stimmt, denn $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ ist unipotent, also nicht halbeinfach, liegt also nicht in G_s. Deshalb kann G_s nicht abgeschlossen sein in G.

Wir haben noch (1) zu beweisen. Dazu verwenden die Eigenschaften der Resultante

$$\mathrm{Res}(f,g) = \det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_m & & & \\ & a_0 & a_1 & \dots & a_m & & \\ & & \dots & \dots & \dots & & \\ & & & a_0 & a_1 & \dots & a_m \\ b_0 & b_1 & \dots & b_n & & & \\ & b_0 & b_1 & \dots & b_n & & \\ & & \dots & \dots & \dots & & \\ & & & b_0 & b_1 & \dots & b_m \end{pmatrix} \tag{2}$$

zweier Polynome

$$f(x) = x^m + a_1 \cdot x^{m-1} + \dots + a_m \text{ , } g(x) = x^n + b_1 \cdot x^{n-1} + \dots + b_n \in k[x].$$

Dabei sollen $a_0 = b_0 = 1$ für die höchsten Koeffizienten von f bzw. g stehen. Die Matrix auf der rechten Seie von (2) soll eine (m+n)×(m+n)-Matrix sein. Die erste Zeile enthält die Koeffizienten von f, gefolgt von Nullen. Die ersten n Zeilen enthalten ebenfalls die Koeffizienten von f, wobei in der jeweils nachfolgenden Zeile eine zusätzliche Null vorangestellt ist. Die letzten m Zeilen sind in analoger Weise mit den Koeffizienten von g belegt (mit vorangestellten und angefügten Nullen).

Die Resultante hat die Eigenschaft, genau dann gleich 0 zu sein, wenn die beiden Polynome eine gemeinsame Nullstelle besitzten (vgl. Jacobson [4], Kapitel 5, Abschnitt 5.4, Satz 5.7 oder Lang [2], Kapitel V, §10, Folgerung von Proposition 4, oder van der Waerden [1], Band I, Kapitel 5, §34). Die Bedingung, daß die Matrix $a \in GL_2$ zwei verschiedene Eigenwerte besitzt, ist äquivalent dazu, daß das charakteristische Polynom von a,

$$\chi_a(x) = \det(x \cdot 1 - a)$$

zwei verschiedene Nullstellen besitzt, d.h. χ_a und die Ableitung χ'_a haben keine gemeinsame Nullstelle, d.h.

$$\mathrm{Res}(\chi_a, \chi'_a) \neq 0.$$

Damit ist U die durch $\mathrm{Res}(\chi_a, \chi'_a)$ definierte offene Hauptmenge von G. Insbesondere gilt (1).

<u>Ein weiteres Gegenbeispiel</u>.

Sei

$$G = \mathbf{T}_2 = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in GL_2\}$$

die lineare algebraische Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen in $\mathbf{GL}_2$ (Beispiel 4 (c) von 2.14). Die offene Teilmenge

$$U = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \mathbf{T}_2 \mid a \neq c \}$$

liegt dicht in der irreduziblen Menge $\mathbf{T}_2$ (vgl. 2.2.2 Aufgabe 1) und besteht aus halbeinfachen Matrizen,

$$U \subseteq G_s \subseteq \mathbf{T}_2.$$

Wäre G_s abgeschlossen in $\mathbf{T}_2$, so wäre $G_s = \mathbf{T}_2$. Das steht im Widerspruch dazu, daß das unipotente Element

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in $\mathbf{T}_2$ aber nicht in G_s liegt. Wäre G_s offen in $\mathbf{T}_2$, so wäre die einelementige Menge

$$G_s \cap G_u = \{e\}$$

offen in

$$G_u = \{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in k \} \cong \mathbb{A}^1,$$

was offensichtlich nicht der Fall ist.

QED.

2.4.11 Beispiel: Jordan-Zerlegung und F-Strukturen

Seien F ein Teilkörper von k und G eine F-Gruppe. Für $x \in G(F)$ brauchen x_s und x_u nicht in G(F) zu liegen. Wir geben hier ein Beispiel an. Wir nehmen an,

$$\mathrm{char}(k) = 2 \text{ und } F \neq F^2,$$

d.h. F ist nicht perfekt. Seien

$$G := GL_2 \text{ und } a \in F\text{-}F^2.$$

Dann hat $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}$ die Jordan-Zerlegung

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{a} \\ \sqrt{a} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{a} \\ \sqrt{a} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix}$$

denn

$$\begin{pmatrix} -1 & 1/\sqrt{a} \\ \sqrt{a} & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1/\sqrt{a} \\ \sqrt{a} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2/\sqrt{a} \\ -2\cdot\sqrt{a} & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ (wegen char(k) = 2).}$$

Der halbeinfache Teil

$$\begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix}$$

von $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}$ liegt nicht in G(F). Ist F ein perfekter Körper liegen halbeinfacher und unipotenter Teil eines Elements von G(F) ebenfalls in G(F). Wir verschieben den Beweis (siehe 12.1.7 (c)).

2.4.12 Unipotente algebraische Gruppen

A. Definition

Eine lineare algebraische Gruppe G heißt <u>unipotent</u>, wenn alle ihre Elemente unipotent sind.

Beispiel

Die lineare algebraische Gruppe

$$\mathbf{U}_n = \{ (x_{ij}) \in \mathbf{T}_n \mid x_{ii} = 1 \text{ für } i = 1,...,n \}$$

der unipotenten oberen Dreiecksmatrizen von 2.1.4 Beispiel 4 (d) ist unipotent.

Bemerkung

Wir zeigen jetzt umgekehrt, daß jede Unipotente lineare algebraische Gruppe isomorph ist zu einer Untergruppe einer $\mathbf{U}_n$.

B. Proposition: Einbettung der unipotenten Gruppen in die Gruppen U_n

Sei G eine Untergruppe von $\mathbf{GL}_n$, welche aus unipotenten Matrizen besteht. Dann gibt es ein $x \in \mathbf{GL}_n$ mit $xGx^{-1} \subseteq \mathbf{U}_n$.

Beweis.

1. <u>Schritt</u>. Reduktion des Beweises auf den Beweis der folgenden Aussage.
Für jeden endlich-dimensionalen k-Vektorraum V und jede Untergruppe

$$G \subseteq GL(V),$$

welche aus unipotenten Endomorphismen besteht, gibt eine vollständige[19] Fahne von k-linearen Unterräumen,

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset ... \subset V_n = V,$$

welche stabil sind gegenüber allen Endomorphismen aus G, (1)

$$a(V_i) \subseteq V_i \text{ für alle i und alle } a \in G.$$

Ist nämlicht $v_1,...,v_n \in V$ eine mit der Fahne verträgliche Basis, d.h.

$$V_i = k\bullet v_1 + ... + k\bullet v_i \text{ für } i = 0,...,n$$

und $x: V \longrightarrow V$ der k-lineare Automorphimus, welcher die Basis der v_i in die Basis der Standard-Einheitsvektoren überführt,

$$x\bullet v_i = e_i,$$

so gilt für $a \in G$:

$$xax^{-1}e_i = xav_i \qquad \text{(Definition von x)}$$

---

[19] Es lassen sich keine weiteren Räume in die Fahne einfügen, ohne daß diese aufhört echt aufsteigend zu sein, d.h. die Dimension benachbarter Räume unterscheidet sich um 1, d.h. $\dim_k V_i = i$ für alle i.

$$= x \bullet \sum_{j=1}^{i} c_j \bullet v_j \quad \text{(wegen } a(V_i) \subseteq V_i\text{)}$$

$$= \sum_{j=1}^{i} c_j \bullet e_j \quad \text{(Definition von x)}$$

Identifizieren wir die k-lineare Abbildung xax^{-1} mit der zugehörigen Matrix bezüglich der Basis der e_i, so ist $xax^{-1}e_i$ gerade die i-te Spalte der Matrix xax^{-1}. Wir haben also gezeigt, höchstens die ersten i Koordinaten der i-ten Spalte von xax^{-1} sind ungleich 0. Da dies für alle i gilt, ist xax^{-1} eine obere Dreiecksmatrix. Dies gilt für alle $a \in G$, d.h. xGx^{-1} besteht aus oberen Dreiecksmatrizen,

$$xGx^{-1} \subseteq T_n.$$

Nun sind nach Voraussetzung alle Elemente $a \in G$ unipotent, d.h. a-1 ist nilpotent. Dann ist aber auch

$$xax^{-1} - 1 = x \bullet (a-1) \bullet x^{-1} \tag{2}$$

nilpotent. Die Einträge auf der Hauptdiagonalen der nilpotenten oberen Dreieckmatrix (2) müssen somit sämtlich gleich 0 sein. Die von xax^{-1} sind also alle gleich 1, d.h. es ist

$$xGx^{-1} \subseteq U_n.$$

Zum Beweis der Behauptung reicht es also, Aussage (1) zu beweisen.
2. Schritt. Beweis von Aussage (1).
Wir führen den Beweis durch Induktion nach n := dim V.
Induktionsanfang: n = 1.
Im Fall dim V = 1 ist

$$0 \subset V$$

die einzige vollständige Fahne von V. Da die Räume 0 und V beide **GL**(V)-stabil sind, sind sie stabil bei jeder Untergruppe von GL(V), also auch bei G.
Induktionsschritt: n > 1.
Wir unterscheiden zwei Fälle.
1. Fall. Es gibt einen G-stabilen Unterraum $W \subseteq V$, der von 0 und V verschieden ist.

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es dann eine vollständige Fahne

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset ... \subset V_d = W$$

aus G-stabilen Unterräumen V_i für i = 0,...,d. Jedes Element $a \in G$ induziert einen k-linearen Automorphismus auf dem Faktorraum $\bar{V}$:= V/W. Wegen $W \neq 0$ gilt

$$n-d = \dim \bar{V} < \dim V.$$

Weil für jedes $a \in G$ der k-lineare Endomorphismus a-1 von V nilpontent ist, ist auch der auf $\bar{V}$ induzierte Endomorphismus nilpotent. Die Gruppe G operiert also auf $\bar{V}$ durch unipotente Automorphismen. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine vollständige Fahne

$$0 = \bar{V}_0 \subset \bar{V}_1 \subset ... \subset \bar{V}_{n-d} = \bar{V}$$

von G-stabilen k-linearen Unterräumen von $\bar{V}$. Sei $\rho: V \longrightarrow \bar{V}$ die natüliche Abbildung auf den Faktorraum. Wir setzen

$$V_{d+i} := \rho^{-1}(\overline{V}_i) \text{ für } i = 0, \dots , n\text{-}d.$$

Man beachte für i = 0 erhalten wir $\rho^{-1}(\overline{V}_0) = \rho^{-1}(0) = \mathrm{Ker}(\rho) = W = V_d$, d.h. die neue Definition von V_d stimmt mit der alten überein. Außerdem ist auf Grund der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow W \longrightarrow V \longrightarrow \overline{V} \longrightarrow 0$$

auch für i = 0, ..., n-d die Sequenz

$$0 \longrightarrow W \longrightarrow V_{d+i} \longrightarrow \overline{V}_i \longrightarrow 0$$

exakt, d.h. es ist

$$\dim V_{d+i} = \dim W + \dim \overline{V}_i = d + i.$$

Wir erhalten somit eine vollständige Fahne

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n = V.$$

von k-linearen Unterräumen. Für i = 1,..., d ist V_i nach Wahl G-stabil. Wir haben zu zeigen, dies ist auch für i = d+1, ... , n der Fall. Nach Definition des k-linearen Automorphismus $\overline{a}$, der durch $a \in G$ auf $\overline{V}$ induziert wird, ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{a} & V \\ \rho\downarrow & & \downarrow\rho \\ \overline{V} & \xrightarrow{\overline{a}} & \overline{V} \end{array}$$

kommutativ. Für $x \in V_{d+i} = \rho^{-1}(\overline{V}_i)$ gilt

$$\begin{array}{lll} \rho(a(x)) = \overline{a}(\rho(x)) & \in \overline{a}(\overline{V}_i) & \text{(nach Wahl von x)} \\ & \subseteq \overline{V}_i & (\overline{V}_i \text{ ist } \overline{a}\text{-stabil}) \end{array}$$

also

$$a(x) \in \rho^{-1}(\overline{V}_i)\,) = V_{d+i}$$

Wir haben gezeigt $a(V_{d+i}) \subseteq V_{d+i}$ für für jedes $a \in G$, d.h. die V_{d+i} sind ebenfalls G-stabil.

2. Fall. Es gibt keinen G-stabilen k-linearen Unterraum der echt zwischen 0 und V liegt. Sei

$$A := \sum_{\sigma\in G} k\bullet\sigma \subseteq \mathrm{End}_k(V)$$

die von den Elementen von G erzeugte k-Teilalgebra von $\mathrm{End}_k(V)$. Die natürliche Modulstruktur von V über $\mathrm{End}_k(V)$,

$$\mathrm{End}_k(V) \times V \longrightarrow V, (f, v) \mapsto f(v),$$

definiert über die natürliche Einbettung $A \hookrightarrow \mathrm{End}_k(V)$ auf V die Struktur eines A-Moduls. Auf Grund der Voraussetzung des zweiten Falls ist V über A ein einfacher A-Modul. Weil k algebraisch abgeschlossen ist, gilt nach dem Satz von Burnside A.3.3.3

$$A = \mathrm{End}_k(V). \tag{3}$$

Nach Voraussetzung besteht G aus unipotenten Endomorphismen, d.h. für jedes $a \in G$ ist a-1 nilpotent. Es gilb also eine vollständige Fahne[20]

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n = V$$

von V mit $(a-1)(V_i) \subseteq V_{i-1}$ für i = 1,..., n, d.h. die Matrix von a-1 bezüglich einer mit der Fahne verträglichen Basis ist eine obere Dreiecksmatrix, auf deren Hauptdialgonalen Nullen stehen. Insbesondere erhalten wir für die Spur

$$\mathrm{Tr}(a) = \mathrm{Tr}(1) + \mathrm{Tr}(a-1) = n + 0 = n = \dim V.$$

Es gilt also

$$\mathrm{Tr}(a) = n \text{ für jedes } a \in G.$$

Man beachte, die Fahne (4) hängt von der Wahl des Elements $a \in G$. Die Folgerung, daß die Spur von a gleich n ist, gilt für alle $a \in G$ gleichermaßen.

Weil die Spur eines Endomorphismus eine lineare Funktion des Endomorphismus ist, folgt für je zwei $a, b \in G$

$$\mathrm{Tr}((1-a)b) = \mathrm{Tr}(b - ab) = \mathrm{Tr}(b) - \mathrm{Tr}(ab) = n - n = 0.$$

Aus demselben Grund bleibt diese Identität richtig wenn wir b durch eine beliebige Linearkombination von Elementen aus G ersetzen (mit Koeffizienten aus k). Wegen (3) gilt damit

$$\mathrm{Tr}((1-a)b) = 0 \text{ für beliebiges } a \in G \text{ und beliebiges } b \in A = \mathrm{End}_k(V).$$

Wir fixieren irgendeine Basis $e_1,\dots,e_n \in V$ von V und identifizieren die k-linearen Endomorphismen von V mit den zugehörigen Matrizen. Für jede n×n-Matrix A können wir deren Spur mit Hilfe der Matrizeb-Multiplikation ausdrücken:

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} e_i^T \bullet A \bullet e_i.$$

Es ist also

$$0 = \mathrm{Tr}((1-a)b) = \sum_{i=1}^{n} e_i^T \bullet (1-a) \bullet b \bullet e_i \text{ für } a \in G \text{ und } b \in \mathrm{End}_k(V).$$

Für vorgegebenes $a \in G$ und vorgegebene i und j können wir b derart wählen, daß gilt

$$b \bullet e_i = e_j \text{ und } b \bullet e_\nu = 0 \text{ für jedes von i verschiedene } \nu.$$

Damit gilt

$$0 = e_i^T \bullet (1-a) \bullet e_j \text{ für } a \in G,$$

und zwar für beliebige i und j (da wir für jedes Paar (i, j) ein passendes b wählen können). Da bedeutet aber, der Eintrag der Matrix 1-a in der Position (i,j) ist gleich 0 - für alle i und alle j. Damit ist 1-a = 0, also a = 1.

Wir haben gezeigt,

$$G = \{1\}.$$

---

[20] Weil a-1 nilpotent ist, ist für jeden (a-1)-stabilen Unterraum W das Bild (a-1)(W) ein stabiler Unterraum echt kleinerer Dimension. Ist $\dim_k f(W) \le \dim_k W - 2$ so kann man einen Unterraum W' wählen der zwischen f(W) und W liegt,

$$f(W) \subset W' \subset W,$$

mit $\dim_k W' = \dim_k W - 1$. Dieser ist automatisch invariant, denn wegen $W' \subset W$ gilt

$$f(W') \subseteq f(W) \subset W'.$$

Dann ist aber jeder k-lineare Unterraum von V ein G-stabiler Unterraum. Da 0 und V die einzige G-stabilen Unterräume sein sollen, folgt $\dim_k V = 1$. Wir sind in der Situation des Induktionsanfangs, für welche die Behauptung trivialerweise gilt.
QED.

2.4.13 Nilpotente und auflösbare Gruppen

2.4.13 A Definitionen

Sei G eine Gruppe. Für Elemente x, y ∈ G bezeichnen wir wie bisher mit

$$(x,y) := xyx^{-1}y^{-1}$$

den Kommutator von x und y. Die Gruppe G heißt nilpotent, wenn es eine natürliche Zahl n gibt mit der Eigenschaft, daß für jeweils n Elemente $x_1,...,x_n \in G$ alle Kommutatoren der Ordnung n-1,

$$(x_1,(...(x_{n-1}, x_n)...)) = e$$

gleich dem neutralen Element e der Gruppe G sind.Die Gruppe G heißt auflösbar, wenn es eine endliche Folge

$$G = G_0 \supset G_1 \supset ... \supset G_r = \{1\}$$

von Untergruppen von G gibt mit folgenden Eigenschaften,
1. G_i ist Normalteiler von G_{i-1} für i = 1,...,r.
2. G_{i-1}/G_i ist eine abelsche Gruppe für i = 1,...,r.

Seien A und B zwei Untergruppen der Gruppe G. Dann heißt die von den Kommutatoren

$$(a,b) := aba^{-1}b^{-1} \text{ mit } a \in A \text{ und } b \in B$$

erzeugte Untergruppe Kommutator von A und B und wird mit

$$(A,B)$$

bezeichnet. Weiter definieren wir die iterierten Kommutatoren $G^{(i)}$ der Gruppe G für i = 0, 1, 2, ... induktiv wie folgt.

$$G^{(0)} := G$$
$$G^{(1)} := (G, G)$$
$$G^{(i+1)} := (G^{(i)}, G^{(i)}).$$

Schließlich verwenden wir noch die folgenden Bezeichnungen.

$$G^{[0]} := G = G^{(0)}$$
$$G^{[1]} := (G, G) = G^{(1)}$$
$$G^{[i+1]} := (G, G^{[i]})$$

Wir wollen diese Untergruppen auch potenzierte Kommutatoren nennen.

Bemerkungen

(i) Das Bild eines Kommutators zweier Elemente bei einem Gruppen-Homomorphismus und bei einem Anti-Homomorphismus ist ein Kommutator. Insbesondere ist das Inverse eines Kommutators ein Kommutator.

(ii) Der Kommutator (G, G) einer Gruppe G mit sich selbst ist ein Normalteiler. Es ist der kleinste Normalteiler N von G, für welchen die Faktorgruppe G/N abelsch ist. Genauer:
1. (G, G) ist ein Normalteiler von G mit G/(G, G) abelsch.
2. Für jeden Normalteiler N von G mit G/N abelsch gilt $(G,G) \subseteq N$.

(iii) Für je zwei Elemente a, b einer Gruppe G gilt

$$(a,b)^{-1} = (b, a).$$

Sind A, B zwei Untergruppen einer Gruppe G, so gilt

$$(A, B) = (B,A).$$

(iv) Eine Gruppe G ist genau dann auflösbar, wenn es eine natürliche Zahl n gibt mit $G^{(n)} = \{1\}$.

(v) Eine Gruppe G ist genau dann nilpotent, wenn es eine natürliche Zahl n gibt mit $G^{[n]} = \{1\}$.

(vi) Für jede natürliche Zahl n ist $G^{[n]}$ die von den Kommutatoren der Ordnung n von G erzeugte Untergruppe.

(vii) Es gilt $G^{[n]} \supseteq G^{(n)}$ für jedes n. Insbesondere sind nilpotente Gruppen auflösbar

Beweis. Zu (i) und zum ersten Teil von (iii). Seien h: $G \longrightarrow G'$ ein Gruppen-Homomorphismus und $x,y \in G$. Dann ist

$$h((x,y)) = h(xyx^{-1}y^{-1}) = h(x)\cdot h(y)\cdot h(x)^{-1}\cdot h(y) = (h(x), h(y))$$

ein Kommutator in G'.

Sei jetzt h: $G \longrightarrow G'$ ein Anti-Homomorphismus (d.h. $h(ab) = h(b)h(a)$, also $h(1) = 1$ und $h(a^{-1}) = h(a)^{-1}$). Dann gilt

$$\begin{aligned} h((x,y)) &= h(xyx^{-1}y^{-1}) = h(y^{-1})h(x^{-1})h(x)h(y) = h(y^{-1})h(x^{-1})h(x^{-1})^{-1}h(y^{-1})^{-1} \\ &= (h(y^{-1}), h(x^{-1})), \end{aligned}$$

d.h. wir erhalten wieder einen Kommutator.

Ist h speziell die Abbildung $G \longrightarrow G$, $x \mapsto x^{-1}$, so erhalten wir

$$(x,y)^{-1} = (y,x),$$

d.h. das Inverse eines Kommutators ist ein Kommutator. Außerdem ist damit auch der erste Teil von Bemerkung (iii) bewiesen.

Zu (ii). Die Gruppe (G, G) besteht aus allen endlichen Produkten von Kommutatoren von Elementen von G. Man beachte, auf Grund der letzten Aussage von (i) bilden diese Produkte tatsächlich eine Untergruppe.

Ebenfalls nach (i) geht ein Kommutator bei einem inneren Automorphismus der Gruppe in einen Kommutator über. Deshalb gilt

$$x\cdot(G,G)\cdot x^{-1} \subseteq (G,G)$$

für jedes $x \in G$, d.h. (G,G) ist ein Normalteiler von G.

Nach Definition gilt für beliebige $x, y \in G$:

$$xy\cdot(yx)^{-1} = xyx^{-1}y^{-1} \in (G,G)$$

also

$$\begin{aligned} xy &\in (G,G)yx \\ &= yx\cdot(G,G) \qquad \text{(weil (G,G) ein Normalteiler ist)} \end{aligned}$$

also

$$xy \equiv yx \bmod (G,G),$$

d.h. G/(G,G) ist eine abelsche Gruppe.

Sei jetzt $N \subseteq G$ ein Normalteiler von G, für welchen G/N abelsch ist. Wir bezeichnen mit

$$\rho: G \longrightarrow G/N,\ g \mapsto g\cdot N,$$

den natürlichen Homomorphismus auf die Faktorgruppe. Dann gilt für beliebige $x,y \in G$:

$$\begin{aligned} xyx^{-1}y^{-1}\cdot N &= \rho(xyx^{-1}y^{-1}) && \text{(nach Definition von } \rho) \\ &= \rho(x)\cdot \rho(y)\cdot \rho(x)^{-1}\cdot \rho(y)^{-1} && \text{(weil } \rho \text{ ein Homomorphismus ist)} \end{aligned}$$

$$= \rho(e) \qquad \text{(weil } G/N \text{ abelsch ist)}$$
$$= e\bullet N \qquad \text{(nach Definition von } \rho)$$
$$= N$$

also

$$(x,y) \in N.$$

Da dies für beliebige $x,y \in G$ gilt, folgt $(G, G) \subseteq N$. Damit ist (G,G) der kleinste Normalteiler von G mit abelscher Faktorgruppe.

Zu (iii). Der erste Teil der Aussage,

$$(a,b)^{-1} = (b,a) \tag{1}$$

wurde bereits zusammen mit Bemerkung (i) bewiesen. Beweisen wir den zweiten Teil. Nach Definition ist

$$(A, B) = < (x, y) \mid x \in A \text{ und } y \in B >$$

die von den Elementen der Gestalt (x,y) mit $x \in A$ und $y \in B$ erzeugte Untergruppe, also die Menge aller endlichen Produkte von Elementen der Gestalt

$$(x, y) \text{ und } (x, y)^{-1} \text{ mit } x \in A \text{ und } y \in B.$$

Wegen (1) ist (A, B) gleich der Menge aller endlichen Produkte von Elementen der Gestalt

$$(x, y) \text{ und } (y, x) \text{ mit } x \in A \text{ und } y \in B.$$

Diese letzte Beschreibung ist symmetrisch in A und B, d.h. es gilt

$$(A, B) = (B, A).$$

Zu (iv). Sei G eine auflösbare Gruppe und

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_r = \{1\}$$

eine Folge von Untergruppen wie in der Definition der Auflösbarkeit gefordert. Zeigen wir durch Induktion nach j, daß dann

$$(G_{i-1})^{(j+1)} \subseteq (G_i)^{(j)} \tag{2}$$

gilt für jedes i und jedes j.

Induktionsanfang: $j = 0$.

Es gilt

$$(G_{i-1})^{(1)} = (G_{i-1}, G_{i-1}) \subseteq G_i$$

wobei die rechte Inklusion besteht, weil G_{i-1}/G_i nach Voraussetzung abelsch ist (und nach (ii)).

Induktionsschritt: $j > 0$.

Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$(G_{i-1})^{(j)} \subseteq (G_i)^{(j-1)} \tag{3}$$

also

$$(G_{i-1})^{(j+1)} = ((G_{i-1})^{(j)}, (G_{i-1})^{(j)}) \qquad \text{(nach Definition des iterierten Kommutators)}$$
$$\subseteq ((G_i)^{(j-1)}, (G_i)^{(j-1)}) \qquad \text{(nach (3))}$$
$$= (G_i)^{(j)} \qquad \text{(nach Definition des iterierten Kommutators)}$$

Damit ist (2) bewiesen. Es folgt

$$G^{(j)} = (G_0)^{(j)} \subseteq (G_1)^{(j-1)} \subseteq \ldots \subseteq (G_j)^{(0)} = G_j \text{ für jedes } j.$$

Für $j = r$ ist damit

$$G^{(r)} = G_r = \{1\}.$$

Die Bedingung ist also notwendig.

Sei jetzt umgekehrt $G^{(n)} = (1)$ für irgendeine natürliche Zahl n. Wir betrachten die Folge von Untergruppen

$$G = G^{(0)} \supseteq G^{(1)} \supseteq \ldots \supseteq G^{(n-1)} \supseteq G^{(n)} = \{1\}.$$

Wegen $G^{(i+1)} := (G^{(i)}, G^{(i)})$ ist $G^{(i+1)}$ Normalteiler in $G^{(i)}$, und die Faktorgruppe

$$G^{(i)}/G^{(i+1)}$$

ist nach (ii) abelsch. Damit ist G auflösbar. Die Bedingung ist hinreichend.

Zu (v). Sei G nilpotent, d.h. es gebe ein n derart, daß alle Kommutatoren

$$(x_1,(\ldots(x_{n-1}, x_n)\ldots))$$

der Ordnung n-1 von Elementen aus G gleich e sind. Nach Definition wird $G^{[i]}$ von Kommutatoren der Ordnung i erzeugt. Im Fall i = n sind diese Erzeuger alle gleich e. Es ist also

$$G^{[n-1]} = \{e\}.$$

Die Bedingung ist notwendig.

Sei umgekehrt

$$G^{[n]} = \{e\}$$

für eine natürliche Zahl n. Wir haben zu zeigen, G ist nilpotent. Dazu reicht es für i = 1, 2, 3, ... zu zeigen, jeder Kommutator der Ordnung i liegt in $G^{[i]}$ (denn dann sind alle Kommutatoren der Ordnung n gleich e). Wir führen den Beweis durch Induktion nach der Ordnung i.

Induktionsanfang: i = 1.

Jeder Kommutator der Ordnung 1 hat die Gestalt (x, y) mit $x, y \in G$. Es gilt

$$(x, y) \in (G, G) = G^{[1]}.$$

Induktionsschritt: i > 1.

Jeder Kommutator der Ordnung i hat die Gestalt

$$(x, y) \text{ oder } (y, x)$$

mit $x \in G$ und einem Kommutator y der Ordnung i-1. Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$y \in G^{[i-1]},$$

also

$$(x,y) \in (G, G^{[i-1]}) = G^{[i]}.$$

Weil $G^{[i]}$ eine Gruppe ist, gilt dann aber auch

$$(y, x) = (x, y)^{-1} \in G^{[i]}.$$

Wir haben gezeigt, die Bedingung ist auch hinreichend.

Zu (vi). Die Aussage ergibt sich aus dem Beweis von (v).

Zu (vii). Es reicht zu zeigen, es gilt

$$G^{[n]} \supseteq G^{(n)}$$

für jedes n. Die verbleibende Aussage ergibt sich dann aus (iv) und (v). Wir beweisen die Inklusion durch Induktion nach n.

Induktionsanfang: n = 0 und n = 1.

Nach Definition gilt

$$G^{[0]} = G = G^{(0)}$$

und

$$G^{[1]} = (G, G) = G^{(1)}.$$

Induktionsschritt: n > 1.

Es gilt

$$G^{[n]} = (G, G^{[n-1]}) \qquad \text{(nach Definition von } G^{[n]})$$

$\supseteq (G, G^{(n-1)})$ (nach Induktionsvoraussetzung)

$\supseteq (G^{(n-1)}, G^{(n-1)})$ (wegen $G \supseteq G^{(n-1)}$)

$= G^{(n)}$ (nach Definition von $G^{(n)}$)

QED.

2.4.13 B Nilpotenz und Auflösbarkeit unipotenter Gruppen

Jede unipotente lineare algebraische Gruppe ist nilpotent, also auflösbar.
Beweis. Sei G eine unipotente lineare algebraische Gruppe. Nach 2.3.7 (i) können wir annehmen, G ist eine abgeschlossene Untergruppe der $\mathbf{GL}_n$,

$$G \subseteq \mathbf{GL}_n.$$

Nach 2.4.12.B können wir sogar annehmen, G ist eine abgeschlossene Untergruppe einer $\mathbf{U}_n$,

$$G \subseteq \mathbf{U}_n.$$

Es reicht deshalb zu zeigen, daß $\mathbf{U}_n$ nilpotent ist. Der Beweis ergibt sich damit aus der Bemerkung hinter der Lösung von Aufgabe 4 von 2.1.5.

QED.

2.4.14 Satz von Kostant-Rosenlicht

Sei G eine unipotente lineare algebraische Gruppe und X ein affiner G-Raum. Dann sind alle Orbits von G in X abgeschlossen.

Beweis. Sei O ein Orbit von G in X. Wir können X durch die Abschließung $\overline{O}$ des Orbits O ersetzen und so erreichen, daß

$$O \text{ dicht in } X$$

ist. Nach 2.3.3(i) ist O offene Teilmenge von X. Wir betrachten die abgeschlossene Menge

$$Y := X - O$$

und deren Ideal $I(Y) \subseteq k[X]$ im Koordinatenring von X. Weil G auf Y operiert, ist I(Y) ein G-stabiler k-linearer Unterraum von k[X]. Nach 2.3.6 A (i) operiert G lokal endlich auf I(Y). Deshalb gibt es ein $f \in I(Y) - \{0\}$ welches bei G fest bleibt,

$$g\bullet f = f \text{ für } g \in G.$$ [21]

Deshalb ist f konstant auf dem Orbit O. Weil O dicht liegt in X, ist f konstant auf X. Mit anderen Worten, das Ideal I(Y) enthält eine Konstante von k[X]. Damit gilt

$$I(Y) = k[X].$$

Deshalb ist Y die leere Menge, also $O = X = \overline{O}$. Das Orbit ist abgeschlossen.
QED.

2.4.15 Aufgabe

Sei G eine Untergruppe der $GL_n = GL(k^n)$, welche in irreduzibler[22] Weise auf k^n operiert. Zeigen Sie, der einzige unipotente Normalteiler von G ist die triviale Untergruppe.

---

[21] Wir fixieren einen G-stabilen von 0 verschiedenen k-linearen Unterraum $W \subseteq I(Y)$ endlicher Dimension. Durch Wahl einer Basis von V erreichen wir, daß G auf W durch Matrizen auf W operiert. Weil die Jordan-Zerlegung mit Homomorphismen algebraischer Gruppen verträglich ist (nach 2.4.8(ii)), operiert G durch unipotente Matrizen auf V. Durch Wechsel der Basis erreichen wir, daß diese Matrizen in U(n) liegen (vgl. 2.1.4 Beispiel 4 (d)). Die Matrizen von U(n) lassen aber den ersten Einheitsvektor fest.

Beweis. Wir setzen

$$V := k^n.$$

Sei N ein unipotenter Normalteiler von G. Nach 2.4.12.B gibt es ein $\xi \in \mathbf{GL}_n$ mit $\xi^{-1} N\xi \subseteq \mathbf{U}_n$. Die Untergruppe

$$\xi^{-1}N\xi$$

besteht aus oberen Dreiecksmatrizen, deren Einträge auf der Hauptdiagonalen gleich 1 sind. Insbesondere gilt

$$\xi^{-1}x\xi\cdot e_1 = e_1 \text{ für jedes } x \in N,$$

also

$$x\xi\cdot e_1 = \xi\cdot e_1 \text{ für jedes } x \in N,$$

Mit $v = \xi\cdot e_1 \in V-\{0\}$ folgt

$$x\cdot v = v \text{ für jedes } x \in N.$$

Weil N ein Normalteiler von G ist, gilt $g^{-1}Ng \subseteq N$ für jedes $g \in G$, also auch

$$g^{-1}xg\cdot v = v \text{ für jedes } x \in N \text{ und jedes } g \in G.$$

also

$$x\cdot gv = gv \text{ für jedes } x \in N \text{ und jedes } g \in G.$$

Damit operieren die Elemente von N wie die identische Abbildung auf den Vektoren der Gestalt

$$gv \text{ mit } g \in G,$$

und damit auch auf dem von diesen Vektoren erzeugen k-linearen Unterraum,

$$xw = w \text{ für jedes } x \in N \text{ und jedes } w \in W := \sum_{\sigma\in G} k\cdot\sigma v$$

Nach Voraussetzung ist V als Modul über der von G erzeugten k-Teilalgebra

$$A := \sum_{\sigma\in G} k\cdot\sigma \subseteq \mathrm{End}_k(V)$$

von $\mathrm{End}_k(V)$ einfach. Nach dem Satz von Burnside A.3.3.3 gilt

$$A = \mathrm{End}_k(V).$$

Weil der Vektor $v \in V$ ungleich 0 ist, gibt es für jedes Element von V eine k-Linearkombination von Elementen aus G, welche v in dieses vorgegebene Element von V überführt. Mit anderen Worten, es gilt W = V. Die Multiplikation mit einem beliebigen $x \in N$ definiert auf V die identische Abbildung, d.h. es gilt

$$N = \{1\} \subseteq GL_n.$$

QED.

---

[22] Die Darstellung $G \longrightarrow \mathbf{GL}_n$ soll irreduzibel sein, d.h. es gibt keinen G-stabilen Unterraum, der echt zwischen 0 und k^n liegt.

2.5 Die Rekonstruktion einer Gruppe aus ihren Darstellungens

Die Ergebnisse dieses Abschnitts werden nachfolgend nicht verwendet. Sie illustrieren die elementare Theorie der linearen algebraischen Gruppen.

Wir verwenden die Bezeichnungen der vorangehenden Abschnitte. Wie bisher seien

$$k$$

ein algebraisch abgeschlossener Körper und

$$G$$

eine lineare algebraische Gruppe (über k).

2.5.1 G-Moduln und G-Homomorphismen

Wir erinnern daran, eine <u>rationale Darstellung</u> einer linearen algebraischen Gruppe G (über k) ist ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum V zusammen mit einem Homomorphismus algebraischer Gruppen

$$r_V : G \longrightarrow \mathbf{GL}(V).$$

Wir sagen in diesem Kontext auch, V ist ein G-<u>Modul</u> (vgl. Beispiel 3 von 2.3.2). Wir bezeichnen mit

$$I$$

den <u>trivialen G-Modul</u>, d.h.

$$I = k \text{ und } r_I(g) = 1 \text{ für jedes } g \in G.$$

Ein <u>Homomorphismus von G-Moduln</u> $\Phi: V \longrightarrow W$ ist eine k-lineare Abbildung, welche äquivariant ist bezüglich G, d.h. es gilt

$$\Phi\circ(r_V(g)) = r_W(g)\circ\Phi \text{ für jedes } g \in G,$$

d.h.

$$\Phi(r_V(g)\bullet v) = r_W(g)\Phi(v)) \text{ für } v \in V \text{ und } g \in G$$

(oder auch abkürzend $\Phi(g\bullet v) = g\bullet\Phi(v)$ für $g\in G$ und $v \in V$).

Bemerkungen

(i) Ist V ein G-Modul, so ist auch der duale k-Vektorraum

$$V^\vee := \mathrm{Hom}_k(V, k)$$

ein G-Modul. Ist nämlich

$$<\ ,\ >: V \times V^\vee \longrightarrow k,\ < v, \ell > \mapsto \ell(v),$$

die <u>Dualitätspaarung</u>, so ist die rationale Darstellung

$$r_{V^\vee}: G \longrightarrow \mathbf{GL}(V^\vee)$$

definiert durch die Bedingung[23]

---

[23] Wenn wir für $g\in G$, $x\in V$ und $u\in V^\vee$ abkürzend

$g\bullet x$ anstelle von $r_V(g)(x)$ und

$g\bullet u$ anstelle von $r_{V^\vee}(g)(u)$

schreiben, so bekommt der nachfolgende Ausdruck die folgende Gestalt.

$<g\bullet x, g\bullet u> = < x, u >$,

d.h. die Operation von G auf dem Dual von V soll durch die Forderung der Invarianz des Skalarprodukts definiert sein. Daraus ergibt sich die explizite Formel für die Operation von G auf $V^\vee$:

$$\begin{aligned}(g\bullet u)(x) &= <x, g\bullet u>\\ &= <g^{-1}\bullet x, g^{-1}\bullet g\bullet u> \qquad \text{(Invarianz des Skalarprodukts)}\end{aligned}$$

$$<r_V(g)(x), r_{V^\vee}(g)(u)> = <x, u> \text{ für } g \in G, x \in V,\ u \in V^\vee,$$

d.h. die Abbildungsvorschrift für $r_{V^\vee}$ ist

$$g \mapsto (u \mapsto (x \mapsto r_V(g)^{-1}(x))),$$

d.h.

$$(r_{V^\vee}(g)(u))(x) = <x, r_{V^\vee}(g)(u)> = <r_V(g)^{-1}(x), u> = u(r_V(g)^{-1}(x))$$

(ii) Sind V und W zwei G-Moduln, so ist auch das Tensorprodukt

$$V\otimes W := V\otimes_k W$$

ein G-Modul mit

$$r_{V\otimes W} = r_V \otimes r_W$$

(d.h. $g\bullet(v\otimes w) = (g\bullet v)\otimes(g\bullet w)$ für $g \in G$, $v\in V$ und $w\in W$).

(iii) Seien G eine algebraische Gruppe (über k) und V ein nicht-notwendig endlich-dimensionaler k-Vektorraum. Dann heißt V <u>lokal endlicher G-Modul</u>, wenn es eine Operation[24]

$$G \times V \longrightarrow V, (g, v) \mapsto r_V(g)\bullet v,$$

von G auf V gibt, welche den drei folgenden Bedingungen genügt.

1. $r_V(g)\in End_k(V)$.
2. Für jedes Element $v \in V$ gibt es einen G-stabilen endlich-dimensionalen k-linearen Unterraum $W \subseteq V$ mit $v \in W$,
$$v \in W \subseteq V, \dim_k W < \infty, g(W) \subseteq W \text{ für jedes } g \in G.$$
3. Für jeden G-stabilen k-linearen Unterraum $W \subseteq V$ ist der Gruppen-Homomorphismus
$$G \longrightarrow End_k(W), g \mapsto r_V(g)|_W$$
eine rationale Darstellung von G.

Sind V und V' lokal enldiche G-Moduln, dann ist ein G-<u>Homomorphismus</u>

$$f:V \longrightarrow V'$$

eine k-lineare Abbildung mit $f(r_V(g)\bullet x) = r_{V'}(g)\bullet f(x)$ für $g \in G$ und $x \in V$ (vgl. auch Bemerkung 2.4.7 (vi))

(iv) Die erste Bedingung von (iii) bedeutet, die Abbildung

$$r_V: G \longrightarrow End_k(V)$$

ist wohldefiniert (und ein Gruppen-Homomorphismus, weil durch r_V eine Operation von G auf V definiert ist).

$= <g^{-1}\bullet x, u>$
$= u(g^{-1}\bullet x).$

[24] d.h. es gilt das Assoziativgesetz,

$$r_V(g')\bullet(r_V(g'')\bullet x) = r_V(g'\bullet g'')\bullet x \text{ für } g', g'' \in G \text{ und } x \in V,$$

und das neutrale Element der Gruppe $e \in G$ operiert wie die Identität,

$$r_V(e)\bullet x = x \text{ für jedes } x \in V.$$

(v) Durch die Operation einer linearen algebraischen Gruppe G (über k) auf deren Koordinatenring durch Rechtstranslationen (vgl. 2.2.0),

$$\rho: G \times A \longrightarrow A,\ (g, f) \mapsto \rho(g)\cdot f\ ,\ \text{mit } (\rho(g)\cdot f)(x) = f(x\cdot g),$$

wird der k-Vektorraum k[G] zu einem lokal-endlichen G-Modul (vgl. Beispiel 2 von 2.3.2 und 2.3.6 A und B).

2.5.2 Lemma: G-Homomorphismen mit Werten in k[G]

Sei G eine lineare algebraische Gruppen über k, V ein G-Modul und

$$u \in V^{\vee} := \mathrm{Hom}_k(V, k)$$

ein Element des Duals von V. Wir setzen

$$\Phi_u(v)(g) := \langle r_V(g)\cdot v, u\rangle := u(r_V(g)\cdot v) \in k$$

für $g \in G$ und $v \in V$. Dann gilt für jedes $v \in V$,

$$\Phi_u(v) \in A := k[G],$$

und $\Phi_u: V \longrightarrow A$ ist ein G-Homomorphismus (lokal endlicher G-Moduln).

Beweis. 1.<u>Schritt</u>. Φ_u ist eine k-lineare Abbildung auf V mit Werten in A.

Nach Voraussetzung sind $r_V(g) \in \mathrm{End}(V)$ und u beides k-lineare Abbildungen. Deshalb ist $\Phi_u(v)(g) = u(r_V(g)\cdot v)$ eine k-lineare Abbildung von v. Es reicht zu zeigen,

$$\Phi_u(v) \in A \text{ für jedes } v \in V.$$

Im Fall v = 0 ist $\Phi_u(v)(g) = u(r_V(g)\cdot 0) = 0$ für jedes $g \in G$, also trivialerweise

$$\Phi_u(v) = 0 \in A.$$

Wir können also annehmen $v \neq 0$. Nach Voraussetzung ist

$$r_V: G \longrightarrow \mathbf{GL}(V)$$

ein Homomorphismus linearer algebraischer Gruppen. Durch Wahl einer k-Vektorraumbasis von V können wir $\mathbf{GL}(V)$ mit $\mathbf{GL}_n$ (mit n := dim V) identifizieren, und

$$r_V(g) \in \mathbf{GL}_n$$

wird zu einer Matrizen-Funktion von $g \in G$, wobei die Einträge der Matrix $r_V(g)$ reguläre Funktionen auf G, d.h. Elemente von A sind. Wegen $v \neq 0$ können wir die Basis von V so wählen, daß v der erste Basis-Vektor wird. Das Matrizen-Produkt

$$r_V(g)\cdot v$$

ist dann gerade die erste Spalte der Matrix $r_V(g)$, also ein Vektor mit Einträgen aus A. Damit ist

$$\Phi_u(v)(g) := \langle r_V(g)\cdot v, u\rangle := u(r_V(g)\cdot v)$$

eine Linearkombination (mit Koeffizienten aus k) von Elementen aus A und damit selbst ein Element aus A.

2. <u>Schritt</u>. $\Phi_u: V \longrightarrow A$ ist äquivariant.

Für $v \in V$ und $g,h \in G$ gilt

$$\begin{aligned}\Phi_u(r_V(g)\bullet v)(h) &= u(r_V(h)\bullet r_V(g)\bullet v) && \text{(nach Definition von } \phi_u\text{)}\\ &= u(r_V(h\bullet g)\bullet v) && \text{(}r_V\text{ definiert eine Operation von G auf V)}\\ &= \Phi_u(v)(h\bullet g) && \text{(nach Definition von } \phi_u\text{)}\\ &= (\rho(g)\bullet \Phi_u(v))(h) && \text{(Definition der G-Modul-Struktur von A)}\end{aligned}$$

also

$$\Phi_u(r_V(g)\bullet v) = \rho(g)\bullet \Phi_u(v).$$

Mit anderen Worten, Φ_u ist äquivariant.

QED.

2.5.3 Satz von Tannaka

Sei G eine lineare algebraische Gruppe über k. Für jeden (endlich-dimensionalen) G-Modul V sei ein Element

$$\alpha_V \in \mathbf{GL}(V)$$

gegeben, wobei die folgenden Bedingungen erfüllt seien.

1. $\alpha_{V\otimes W} = \alpha_V \otimes \alpha_W$ für beliebige G-Moduln V und W.
2. $\phi\circ\alpha_V = \alpha_W\circ\phi$ für jeden Homomorphismus $\phi: V \longrightarrow W$ von G-Moduln.
3. $\alpha_I = 1$ (für den trivialen G-Modul I).

Dann gibt es ein $x \in G$ mit $\alpha_V = r_V(x)$ für jeden G-Modul V.

Beweis. 1. Schritt. Fortsetzung der gegebenen Abbildungen α_V auf die lokal endlichen G-Moduln.

Sei V ein lokal endlicher G-Modul und $v \in V$. Dann gibt es einen endlich-dimensionalen G-stabilen k-linearen Unterraum W von V mit

$$v \in W \subseteq V.$$

Wir setzen

$$\alpha_V(v) := \alpha_W(v) \in W.$$

Diese Definition hängt nicht von der speziellen Wahl des G-stabilen Unterraums W, der v enthält, ab. Ist nämlich W' ein zweiter solcher Unterraum, so ist auch $W\cap W'$ ein solcher und die natürlichen Einbettungen

$$W\cap W' \hookrightarrow W \text{ und } W\cap W' \hookrightarrow W'$$

sind Homomorphismen von G-Moduln. Nach Bedingung 2 stimmen die Abbildungen

$$\alpha_{W\cap W'}, \alpha_W \text{ und } \alpha_{W'}$$

auf $W\cap W'$ überein, liefern also denselben Wert für $\alpha_V(v)$. Die Bedingungen 1-3 sind dann auch für lokal endliche G-Moduln erfüllt.

2. Schritt. Es gibt einen Automorphismus $\phi: G \longrightarrow G$ mit

$$\alpha_{k[G]}(f)(g) = f(\phi(g))$$

für beliebige $f \in k[G]$ und beliebige $g \in G$, d.h.

$$\phi^* = \alpha := \alpha_{k[G]}.$$

Weil k[G] ein lokal endlicher G-Modul bezüglich der Rechtstranslation

$$\rho: G\times k[G] \longrightarrow k[G],\ (g, f) \mapsto \rho(g)\bullet f,$$

mit $(\rho(g)\bullet f)(y) = f(yg)$ für $y \in G$ ist, ist

$$\alpha := \alpha_{k[G]}: k[G] \longrightarrow k[G]$$

nach dem ersten Schritt ein wohldefinierter k-linearer Automorphismus von

$$A := k[G].$$

Entsprechend ist auch $k[G]\otimes k[G]$ ein lokal endlicher G-Modul - ebenfalls bezüglich der Rechtstranslation

$$G\times A\otimes A \longrightarrow A\otimes A,\ (g, f\otimes g) \mapsto (\rho(g)\bullet f)\otimes(\rho(g)\bullet g),$$

Nach Bedingung 1 ist

$$\alpha_{A\otimes A} = \alpha_A\otimes\alpha_A = \alpha\otimes\alpha. \tag{1}$$

Die Multipikation der k-Algebra A induziert eine G-äquivariante Abbildung

$$m:\ A\otimes A \longrightarrow A,\ a'\otimes a'' \mapsto a'\bullet a'',$$

denn für $x,g \in G$ gilt

$$\begin{aligned} m(g\bullet(a'\otimes a''))(x) &= m((g\bullet a')\otimes(g\bullet a''))(x) \\ &= ((g\bullet a')\bullet(g\bullet a''))(x) \\ &= (g\bullet a')(x)\bullet(g\bullet a'')(x) \\ &= a'(xg)\bullet a''(xg) \\ &= (a'\bullet a'')(xg) \\ &= (g\bullet(a'\bullet a''))(x) \\ &= g\bullet m(a'\otimes a''))(x) \end{aligned}$$

also

$$m(g\bullet a'\otimes a'') = g\bullet m(a'\otimes a'').$$

Damit ist $m: A\otimes A \longrightarrow A$ ein Homomorphismus von lokal endlichen G-Moduln. Es folgt

$$\begin{aligned} m\circ(\alpha\otimes\alpha) &= m\circ\alpha_{A\otimes A} && \text{(nach (1))} \\ &= \alpha_A\circ m && \text{(nach Bedingung 2)} \\ &= \alpha\circ m \end{aligned}$$

Das bedeutet, die k-lineare Bijektion $\alpha: A \longrightarrow A$ ($\in GL(A)$) ist ein Automorphismus der k-Algebra A.Es gibt also einen Automorphismus der linearen algebraischen Gruppe G, sagen wir

$$\phi: G \longrightarrow G,$$

mit $\alpha = \phi^*$, d.h.

$$\alpha(f)(g) = \phi^*(f)(g) = (f\circ\phi)(g) = f(\phi(g))$$

für $f\in A$ und $g\in G$.

3. <u>Schritt</u>. Mit $x := \phi(e)$ gilt $\phi(g) = g\bullet x$ und $\rho(x) = \alpha$.

Nach Definition der Komultiplikation $\Delta: A \longrightarrow A\otimes A$ der linearen algebraischen Gruppe G gilt

$$\Delta(f)(g', g'') = f(g'\bullet g'')$$

für $f\in A = k[G]$ und $g',g'' \in G$. Es folgt für $f\in A$ und $x,y\in G$ und $\Delta(f) = \sum_i f'_i\otimes f''_i$

$$(g\bullet\Delta(f))(x,y) = f(x\bullet y\bullet g)$$

$$= \Delta(f)(x,y\bullet g)$$

$$= \sum_i (f'_i \otimes f''_i)(x,y\bullet g)$$

$$= \sum_i (f'_i(x) \otimes f''_i)(y\bullet g)$$

$$= (id\otimes\rho(g))(\sum_i (f'_i(x)\otimes f''_i)(y))$$

$$= (id\otimes\rho(g))((\sum_i f'_i \otimes f''_i)(x,y))$$

$$= ((id\otimes\rho(g))\circ\Delta(f))(x,y),$$

also

$$(g\bullet\Delta(f)) = (id\otimes\rho(g))\circ\Delta(f),$$

also

$$g\bullet\Delta = (id\otimes\rho(g))\circ\Delta.$$

Wir versehen $B := A\otimes A$ mit der Struktur eines lokal endlichen G-Moduls mit Hilfe des Gruppen-Homomorphismus

$$r_B: G \longrightarrow GL(B),\ g \mapsto id\otimes\rho(g).$$

Dann ist die Komultiplikation

$$\Delta: A \longrightarrow B$$

äquivariant, d.h. ein Homomorphismus von lokal endlichen G-Moduln. Nach dem ersten Schritt ist

$$\Delta\circ\alpha = \alpha_B\circ\Delta \qquad \text{(Bedingung 2)}$$

Weil der G-Modul B nach Definition von r_B gerade das Tensorprodukt des G-Moduls A zur Darstellgung $G \longrightarrow GL(A)$, $g \mapsto id$, mit dem G-Modul A zur Darstellung $G\longrightarrow GL(A)$, $g \mapsto \rho(g)$ ist, gilt

$$\alpha_B = id\otimes\alpha \qquad \text{(Bedingung 1).}$$

Zusammen erhalten wir

$$\Delta\circ\alpha = (id\otimes\alpha)\circ\Delta.$$

Wir gehen von den k-Algebra-Homomorphismen zu den Morphismen der algebraischen Varietäten über und erhalten

$$\alpha^\#\circ\Delta^\# = \Delta^\#\circ(id\times\alpha^\#),$$

d.h. (nach dem zweiten Schritt)

$$\phi\circ\mu = \mu\circ(id\times\phi),$$

wobei $\mu: G\times G \longrightarrow G$ die Multiplikation von G bezeichne. Für $g, h \in G$ gilt also

$$\phi(g\bullet h) = g\bullet\phi(h). \tag{2}$$

Mit

$$x := \phi(e), \qquad \text{e das neutrale Element von G}$$

folgt

$$\phi(g) = g\bullet x$$

und

$$(\rho(x)f)(g) = (\rho(\phi(e))f)(g) \qquad \text{(Definition von x)}$$

$$= f(g\bullet\phi(e)) \qquad \text{(Definition der Rechtstranslation)}$$

$= f(\phi(g\cdot e))$ (nach (2))

$= f(\phi(g))$ ($e \in G$ ist das neutrale Element)

Da dies für jedes $g \in G$ gilt,folgt

$$\begin{aligned} \rho(x)f &= f\circ\phi \\ &= \phi^*(f) \\ &= \alpha(f) \qquad \text{(nach dem zweiten Schritt).} \end{aligned}$$

Da dies für jedes $f \in A$ gilt, folgt

$$\rho(x) = \alpha.$$

4. Schritt. $\alpha_V = r_V(x)$ für jeden G-Modul V (Abschluß des Beweises).

Seien V ein (endlich-dimensionaler) G-Modul und $r_V: G \longrightarrow \mathrm{End}_k(V)$ die zugehörige rationale Darstellung. Für jedes $u \in V^\vee$ betrachten wir den Homomorphismus lokal endlicher G-Moduln

$$\phi_u: V \longrightarrow A := k[G],\ v \mapsto (g \mapsto u(r_V(g)\cdot v)),$$

von 2.5.2. Es gilt

$$\begin{aligned} \phi_u\circ\alpha_V &= \alpha_A \circ \phi_u && \text{(Bedingung 2 und der erste Schritt)} \\ &= \alpha\circ \phi_u && \text{(Definition von } \alpha \text{ im 2. Schritt)} \\ &= \rho(x)\circ \phi_u && \text{(dritter Schritt),} \end{aligned}$$

d.h.

$$\phi_u\circ\alpha_V = \rho(x)\circ \phi_u. \tag{3}$$

Für $g \in G$ und $v \in V$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle r_V(g)\cdot\alpha_V(v), u \rangle &= u(r_V(g)\cdot\alpha_V(v)) \\ &= \phi_u(\alpha_V(v))(g) && \text{(Definition von } \phi_u) \\ &= (\rho(x)(\phi_u(v)))(g) && \text{(nach (3))} \\ &= \phi_u(v)(gx) && \text{(Definition von } \rho) \\ &= u(r_V(gx)\cdot v) && \text{(Definition von } \phi_u) \\ &= \langle r_V(gx)\cdot v, u \rangle. \end{aligned}$$

Da dies für alle $u \in V^\vee$ (und die Dualitätspaarung nicht entartet ist), folgt

$$r_V(g)\cdot\alpha_V(v) = r_V(gx)\cdot v.$$

Speziell für $g = e$ erhalten wir

$$\alpha_V(v) = r_V(x)\cdot v.$$

Da dies für alle $v \in V$ gilt, folgt

$$\alpha_V = r_V(x).$$

QED.

Bemerkung

Als nächstes wollen wir zeigen, daß auf Grund des Satzes von Tannaka die Algebra

$$A = k[G]$$

aus den rationalen Darstellungen von G rekonstruiert werden kann. Deshalb befassen wir uns jetzt mit einer expliziten Beschreibung von A mit Hilfe dieser Darstellungen

2.5.4 Die Abbildungen $\psi_V: V\otimes V^\vee \longrightarrow k[G]$

Seien G eine lineare algebraische Gruppe über k, V ein (endlich-dimensionaler) G-Modul, und ψ_V die Abbildung

$$\psi_V: V\otimes V^\vee \longrightarrow k[G],\ v\otimes u \mapsto \phi_u(v),$$

mit ϕ_u wie in 2.5.2, d.h.

$$\phi_u(v)(g) := \langle r_V(g)\bullet v, u\rangle := u(r_V(g)\bullet v) \text{ für } g \in G.$$

Wir lassen G auf sich selbst durch innere Automorphismen opererieren,

$$a: G \times G \longrightarrow G,\ (g, x) \mapsto \sigma_g(x) := g\bullet x\bullet g^{-1},$$

und versehen A = k[G] wie in 3.3.6 A mit der induzierten Operation von G,

$$s: G \longrightarrow GL(k[G]),\ g \mapsto s(g),$$

mit

$$(s(g)f)(x) = f(a(g^{-1},x)) = f(\sigma_{g^{-1}}(x)) = f(g^{-1}xg)$$

Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) $\psi_V: V\otimes V^\vee \longrightarrow A$ ist ein Homomorphismus von lokal endlichen G-Moduln, d.h. es gilt

$$\psi_V(g\bullet(v\otimes u)) = s(g)\psi_V(v\otimes u))$$

für $g\in G$, $v\in V$ und $u \in V^\vee$.

(ii) Für jeden Homomorphismus $\phi: V \longrightarrow W$ gilt

$$\psi_V\circ(id\otimes\phi^\vee) = \psi_W\circ(\phi\otimes id),$$

d.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V\otimes W^\vee & \xrightarrow{\phi\otimes 1} & W\otimes W^\vee \\ 1\otimes\phi^\vee\downarrow & & \downarrow\psi_W \\ V\otimes V^\vee & \xrightarrow{\psi_V} & k[G] \end{array}$$

ist kommutativ. Dabei bezeichne

$$\phi^\vee: W^\vee \longrightarrow V^\vee, \ell \mapsto \phi^*(\ell) = \ell\circ\phi,$$

die zu ϕ duale Abbildung.

(iii) Es gilt

$$\psi_{V\otimes W} = m\circ(\psi_V\otimes\psi_W)\circ c,$$

d.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (V\otimes W)\otimes(V\otimes W)^\vee & \xrightarrow{\psi_{V\otimes W}} & k[G] \\ c\downarrow\cong & & \uparrow m \\ (V\otimes V^\vee)\otimes(W\otimes W^\vee) & \xrightarrow{\psi_V\otimes\psi_W} & k[G]\otimes k[G] \end{array}$$

ist kommutativ. Dabei sei

$$m: k[G]\otimes k[G] \longrightarrow k[G],\ f\otimes g \mapsto f\bullet g,$$

der k-Algebra-Homomorphismus, der durch die multiplikative Struktur der k-Algebra k[G] definiert ist und

$$c: (V\otimes W)\otimes(V\otimes W)^{\vee} \xrightarrow{\cong} (V\otimes V^{\vee})\otimes(W\otimes W^{\vee})$$

der k-Algebra-Isomorphismus, der gegeben ist durch die Umkehrung des natürlichen Isomorphismus

$$V^{\vee}\otimes W^{\vee} \xrightarrow{\cong} (V\otimes W)^{\vee},\ \alpha\otimes\beta \mapsto (v\otimes w \mapsto \alpha(v)\bullet\beta(w))$$

und eine Permutation der Tensor-Faktoren.

Beweis. Zu (i). Es gilt

$$\begin{aligned}
\psi_V(g\bullet(v\otimes u)) &= \psi_V((g\bullet v)\otimes(g\bullet u)) && \text{(Operation von G auf Tensorprodukten)}\\
&= \phi_{g\bullet u}(g\bullet v) && \text{(Definition von } \psi_V)\\
&= R_{g^{-1}}(\phi_{g\bullet u}(v))\ (\in A) && (\phi_u \text{ ist G-äquivarient nach 2.5.2)}
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir für jedes $x \in G$:

$$\begin{aligned}
\psi_V(g\bullet(v\otimes u))(x) &= (R_{g^{-1}}(\phi_{g\bullet u}(v)))(x)\\
&= \phi_{g\bullet u}(v))(xg) && \text{(Definition von } R_{g^{-1}})\\
&= (g\bullet u)((xg)\bullet v) && \text{(Definition von } \Phi_u \text{ in 2.5.2)}\\
&= u(g^{-1}((xg)\bullet v)) && \text{(Operation von G auf } V^{\vee}\text{, vgl. Bemerkung 2.5.1 (i))}\\
&= \phi_u(v)(g^{-1}xg) && \text{(Definition von } \phi_u \text{ in 2.5.2)}\\
&= \phi_u(v)(\sigma_g^{-1}(x))\\
&= (\phi_u(v)\circ\sigma_g^{-1})(x).
\end{aligned}$$

Da dies für jedes $x \in G$ gilt, folgt

$$\begin{aligned}
\psi_V(g\bullet(v\otimes u)) &= \phi_u(v)\circ\sigma_g^{-1}\\
&= \psi_V(v\otimes u)\circ\sigma_g^{-1} && \text{(Definition von } \psi_V)\\
&= (\sigma_g^{-1})^*(\psi_V(v\otimes u)).
\end{aligned}$$

Zu (ii). Für $v \in V$ und $t \in W^{\vee}$ gilt

$$\begin{aligned}
\psi_V\circ(id\otimes\phi^{\vee})(v\otimes t) &= \psi_V(v\otimes(t\circ\phi)) && \text{(Definitoin von } \phi^{\vee})\\
&= \phi_{t\circ\phi}(v) && \text{(Definition von } \psi_V)
\end{aligned}$$

Für jedes $g \in G$ folgt damit

$$\begin{aligned}
(\psi_V\circ(id\otimes\phi^{\vee})(v\otimes t))(g) &= (\phi_{t\circ\phi}(v))(g)\\
&= (t\circ\phi)(g\bullet v) && \text{(Definition von } \phi_u \text{ in 2.5.2)}\\
&= t(\phi(g\bullet v))
\end{aligned}$$

$= t(g\bullet\phi(v))$ (ϕ ist G-äquivariant)
$= \phi_t(\phi(v))(g)$ (Definition von ϕ_u in 2.5.2)
$= \psi_W(\phi(v)\otimes t)(g)$ (Definition von ψ_W).

Da dies für jedes $g \in G$ gilt, folgt

$$\psi_V\circ(\mathrm{id}\otimes\phi^\vee)(v\otimes t) = \psi_W(\phi(v)\otimes t) = (\psi_W\circ(\phi\otimes \mathrm{id}))(v\otimes t).$$

Da dies für alle $v \in V$ und alle $t \in W^\vee$ gilt, folgt

$$\psi_V\circ(\mathrm{id}\otimes\phi^\vee) = \psi_W\circ(\phi\otimes \mathrm{id}).$$

Zu (iii). Wir identifizieren $(V\otimes W)^\vee$ mit $V^\vee\otimes W^\vee$ in der beschriebenen Weise. Für

$$v \in V,\ w\in W,\ u\in V^\vee,\ t \in W^\vee$$

gilt dann

$\psi_{V\otimes W}(v\otimes w\otimes u\otimes t) = \phi_{u\otimes t}(v\otimes w)$ (Definition von $\psi_{V\otimes W}$)

Für jedes $g \in G$ ist damit

$\psi_{V\otimes W}(v\otimes w\otimes u\otimes t)(g) = \phi_{u\otimes t}(v\otimes w)(g)$
$= (u\otimes t)(g\bullet(v\otimes w))$ (Definition von $\phi_{u\otimes t}$ in 2.5.2)
$= (u\otimes t)((g\bullet v)\otimes(g\bullet w)))$ (Operation von G auf $V\otimes W$)
$= u(g\bullet v)\bullet t(g\bullet w)$ (Identifikation von $(V\otimes W)^\vee$ mit $V^\vee\otimes W^\vee$)
$= \phi_u(v)(g)\bullet\phi_t(w)(g)$ (Definition von ϕ_u und ϕ_t)
$= (\phi_u(v)\bullet\phi_t(w))(g)$

Weil dies für alle $g \in G$ gilt, folgt

$\psi_{V\otimes W}(v\otimes w\otimes u\otimes t) = \phi_u(v)\bullet\phi_t(w)$
$= m(\phi_u(v)\otimes \phi_t(w))$ (Definition von m)
$= m(\psi_V(v\otimes u)\otimes \psi_W(w\otimes t))$ (Definition von ψ_V und ψ_W)
$= m((\psi_V\otimes\psi_W)(v\otimes u\otimes w\otimes t))$
$= (m\circ(\psi_V\otimes\psi_W))(v\otimes u\otimes w\otimes t)$
$= (m\circ(\psi_V\otimes\psi_W)\circ c)(v\otimes w\otimes u\otimes t)$ (Definition von c)[25].

Da dies für alle $v\in V$, $w\in W$, $u\in V^\vee$ und $t\in W^\vee$ gilt, folgt die Behauptung

$$\psi_{V\otimes W} = m\circ(\psi_V\otimes\psi_W)\circ c$$

QED.

2.5.5 Konstruktion der Algebra $\mathcal{A}$

Sei G eine lineare algebraische Gruppe über k und

[25] Zusammen mit der Identifikation von $(V\otimes W)^\vee$ mit $(V^\vee)\otimes(W^\vee)$

$$\mathcal{F} := \oplus_{V \text{ ist G-Modul}} V\otimes V^{\vee}$$

die direkte Summe über alle Tensorprodukte $V\otimes V^{\vee}$, wobei V ein Repräsentantensystem der Menge aller Isomorphie-Klassen der (endlich-dimensionalen G-Moduln) durchlaufe. Weil jedes Element von $\mathcal{F}$ bereits in einer endlichen direkten Teilsumme dieser direkten Summe liegt, ist $\mathcal{F}$ ein lokal endlicher G-Modul.
Bezeichne

$$i_V: V\otimes V^{\vee} \hookrightarrow \mathcal{F}$$

die natürliche Einbettung, d.h. i_V identifizierre $V\otimes V^{\vee}$ mit dem zu V gehörigen direkten Summanden von $\mathcal{F}$. Dies ist eine k-lineare Abbildung. Es gibt eine eindeutig bestimmte Operation von G auf $\mathcal{F}$, für welche alle i_V äquivariante Abbildungen und damit Homomorphismen von lokal endlichen G-Moduln sind.

Weiter sei

$$\mathcal{R} := < i_V\circ(id\otimes\phi^{\vee})(z)-i_W\circ(\phi\otimes id)(z) \;\Big|\; \begin{matrix} \phi:V\longrightarrow W \text{ Homophismus von G-Moduln} \\ z\in V\otimes W^{\vee} \end{matrix} >$$

der k-lineare Unterraum von $\mathcal{F}$, der von den Differenzen $i_V(id\otimes\phi^{\vee})(z)-i_W(\phi\otimes id)(z)$ erzeugt wird, wobei $\phi:V\longrightarrow W$ die Homomorphismen von G-Moduln und z die Elemente von $V\otimes W^{\vee}$ durchläuft. Dieser ist G-stabil (siehe unten), sodaß der Faktorraum

$$\mathcal{A} := \mathcal{F}/\mathcal{R}.$$

ein lokal endlicher G-Modul mit der Eigeschaft ist, daß die natürliche Abbildung

$$\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{A}$$

auf den Faktorraum k-linear und G-äquivariant ist.
Bezeichne

$$a_V(v\otimes u) := i_V(v\otimes u) \bmod \mathcal{R} \in \mathcal{A}$$

für beliebige G-Moduln V und Elemente $v \in V$ und $u\in V^{\vee}$ die Restklasse von $i_V(v\otimes u)$. Auf diese Weise ist eine k-lineare und G-äquivariante Abbildung

$$a_V:V\otimes V^{\vee} \longrightarrow \mathcal{A}$$

definiert.[26] Für jeden Homomorphismus $\phi:V\longrightarrow W$ von G-Moduln und Elemente $v\in V$ und $t\in W^{\vee}$ gilt[27]

$$a_V(v\otimes\phi^{\vee}(t)) = a_W(\phi(v)\otimes t). \tag{1}$$

Wir definieren wir folgt eine Multiplikation auf $\mathcal{A}$. Wir setzen

$$a_V(v\otimes u)\bullet a_W(w\otimes t) := a_{V\otimes W}((v\otimes w)\otimes(u\otimes t)) \tag{2}$$

für G-Moduln V und W und Elemente $v\in V, u\in V^{\vee}$, $w\in W$, $t\in W^{\vee}$.

---

[26] Es ist gerade die Zusammensetzung von i_V mit der natürlichen Surjektion $\mathcal{F}\twoheadrightarrow\mathcal{A}$.

[27] Man betrachte die Erzeuger von $\mathcal{R}$ mit $z = v\otimes u$.

Diese Definition ist korrekt und induziert auf $\mathcal{A}$ die Struktur einer assoziativen und kommutativen k-Algebra.
Das Element

$$a_I(1\otimes 1),$$

wobei I: G $\longrightarrow$ $End_k(k)$, g $\mapsto$ 1, die triviale Darstellung von G bezeichne, ist das Einselement von $\mathcal{A}$.

Bemerkung
Man beachte die Ähnlichkeit der Relationen (1) und (2) zu den Identitäten (i) und (ii) von 2.5.4.

Beweis. 1.Schritt. Der Unterraum $\mathcal{R}$ von $\mathcal{F}$ ist G-stabil. Insbesondere induziert die Operation von G auf $\mathcal{F}$ eine Operation von G auf

$$\mathcal{A} = \mathcal{F}/\mathcal{R}.$$

Durch diese Operation wir $\mathcal{A}$ zu einem lokal endlichen G-Modul.

Für g $\in$ G, einen Homomorphismus ϕ:V$\longrightarrow$W von G-Moduln und z $\in$ $V\otimes W^\vee$ gilt

$$g\bullet(i_V\circ(id\otimes\phi^\vee)(z)-i_W\circ(\phi\otimes id)(z)) \quad = (i_V\circ(id\otimes\phi^\vee)(g\bullet z)-i_W\circ(\phi\otimes id)(g\bullet z)),$$

denn i_V, id, ϕ und $\phi^\vee$ (und damit auch $\phi\otimes id$ und $id\otimes\phi^\vee$ sind Homomorphismen von G-Moduln). Diese Identität zeigt, daß die Erzeuger von $\mathcal{R}$ bei der Operation von G in Erzeuger von $\mathcal{R}$ übergehen. Damit ist $\mathcal{R}$ stabil unter der Operation von G. Damit induziert die Operation von G auf $\mathcal{F}$ eine Operation von G auf $\mathcal{A} = \mathcal{F}/\mathcal{R}$.
Wegen

$$g\bullet i_V(z) = i_V(g\bullet z)$$

überführt die Operation von G auf Φ jeden direkten Summanden der dirrekten Summe $\mathcal{F}$ in sich. Insbesondere wird $\mathcal{F}$ auf diese Weise zu einem lokal endlichen G-Modul. Dasselbe gilt dann aber auch für $\mathcal{A} = \mathcal{F}/\mathcal{R}$.
2.Schritt. Definition (2) ist korrekt.
Es reicht zu zeigen, die rechte Seite der $\mathbb{Z}$-linearen Fortsetzung von (2) ändert sich nicht, wenn man einen Faktor der linken Seite um einen Summanden der Gestalt

$$a_V(v\otimes\phi^\vee(u))-a_W(\phi(v)\otimes u)$$

mit einem Homomorphismus ϕ:V $\longrightarrow$ W und Elementen v$\in$V und u$\in W^\vee$ abändert.
Dazu reicht es zu zeigen, diese Differenz wird Null, wenn sie mit einem Element der Gestalt $a_Z(x\otimes y)$ von links oder rechts multipliziert (genauer: die zugehörige rechte Seite von (2) wird Null). Zu zeigen ist somit

$$0 = a_{V\otimes Z}((v\otimes x)\otimes(\phi^\vee(u)\otimes y)) - a_{V\otimes Z}((\phi(v)\otimes x)\otimes(u\otimes y))$$

und

$$0 = a_{Z\otimes W}((x\otimes v)\otimes(y\otimes \phi^\vee(u))) - a_{Z\otimes W}((x\otimes \phi(v))\otimes(y\otimes u))$$

Diese beiden Identitäten bestehen aber auf Grund von (1) mit

$$\phi\otimes id: V\otimes Z\longrightarrow W\otimes Z \text{ bzw. } id\otimes\phi: Z\otimes V \longrightarrow Z\otimes W$$

anstelle von ϕ.
3. Schritt. Die Multiplikation von $\mathcal{A}$ ist assoziativ.
Das folgt aus Definition (2), der Assoziativität des Tensorprodukt-Operation,

$$(A\otimes B)\otimes C \cong A\otimes(B\otimes C)$$

(bis auf Isomorphie) und der Tatsache, daß keine zwei verschiedene direkte Summanden aus denen die direkten Summe $\mathcal{F}$ gebildet wurde isomorph sind.

4. Schritt. Die Multiplikation von $\mathcal{A}$ ist kommutativ.
Die Argumentation ist analog zu der des dritten Schritts.
5. Schritt. $a_I(1\otimes 1)$ ist das Einselement von $\mathcal{A}$.
In (2) gilt mit W = I

$$V\otimes W \cong V,\ x\otimes y \mapsto xy,$$

und bei diesem Isomorphismus geht $(v\otimes 1)\otimes(u\otimes 1)$ in $v\otimes u$ über. Deshalb ist

$$a_{V\otimes I}((v\otimes 1)\otimes(u\otimes 1)) = a_V(v\otimes u),$$

also

$$a_V(v\otimes u)\bullet a_I(1\otimes 1) = a_V(v\otimes u),$$

d.h. $a_I(1\otimes 1)$ ist das Einselement.
QED.

2.5.6 Die Charaktergruppe und Determinante

Sei G eine lineare algebraische Gruppe über k. Dann bilden die Homomorphismen algebraischer Gruppen

$$G \longrightarrow \mathbf{G}_m$$

bezüglich der gewöhnlichen Multiplikation von Abbildungen eine abelsche Gruppe. Diese Gruppe wird mit

$$\mathbf{X}(G)$$

bezeichnet und heißt Charaktergruppe von G.
Bemerkungen

(i) Sei V ein 1-dimensionaler G-Modul. Für jedes $v \in V - \{0\}$ gilt dann

$$g\bullet v = \chi(g)\bullet v \text{ für jedes } g \in G$$

mit einem eindeutig bestimmten $\chi(g) \in k^* = k\text{-}\{0\}$. Die Abbildung

$$\chi: G \longrightarrow k^* = \mathbf{G}_m$$

ist ein Homomorphismus algebraischer Gruppen: man erhält ihn aus der rationalen Darstellung $G \longrightarrow \mathbf{GL}(V)$, indem man $\mathbf{GL}(V)$ mit $\mathbf{GL}_1 = \mathbf{G}_m$ mit Hilfe der Basis v von V identifiziert.

(ii) Zwei eindimensionale G-Moduln mit demselben zugehörigen Charakter χ sind isomorph, denn beide sind isomorph zum G-Modul mit der rationalen Darstellung

$$\chi: G \longrightarrow \mathbf{GL}(k) = k^*.$$

(iii) In der Situation von (i) besitzt der G-Modul

$$V\otimes V^\vee$$

ein natürliches Basis-Element: ist $v \in V\text{-}\{0\}$ beliebig und $v^\vee$ die zur Basis v von V duale Basis, so hängt

$$v\otimes v^\vee$$

nicht von der speziellen Wahl von v ab. Ist nämlich $w \in V\text{-}\{0\}$ ein weiteres Element, so gilt $w = c\bullet v$ mit $c \in k^*$ und $w^\vee = (1/c)\bullet v^\vee$, also

$$w\otimes w^\vee = (cv)\otimes(1/c)v^\vee = v\otimes v^\vee.$$

Wir schreiben

$$e_{V\otimes V^\vee} := v\otimes v^\vee,\ v \in V\text{-}\{0\}.$$

Ist χ der zu V gehörige Charakter von G, so setzen wir

$$a(\chi) := a_V(e_{V\otimes V^\vee}) .$$

Dies ist eine Einheit der k-Algebra $\mathcal{A}$ von 2.5.4.[28]

(iii) Seien V ein (endlich-dimensionaler) G-Modul der Dimension d und

$$\phi:\ V^{\otimes d} \twoheadrightarrow \wedge^d V,\ v_1\otimes\ldots\otimes v_d \mapsto v_1\wedge\ldots\wedge v_d, \qquad (1)$$

der natürliche Homomorphismus von G-Moduln. Wir identifizieren

$$(\wedge^d V)^\vee \text{und } \wedge^d(V^\vee)$$

mit Hilfe der Paarung

$$(v_1\wedge\ldots\wedge v_d,\ u\wedge\ldots\wedge u_d) = \det(\langle u_i, v_j\rangle),$$

d.h. mit Hilfe des Isomorphismus[29]

$$\wedge^d(V^\vee) \xrightarrow{\cong} (\wedge^d V)^\vee,\ u_1\wedge\ldots\wedge u_d \mapsto (v_1\wedge\ldots\wedge v_d \mapsto \det(\langle u_i, v_j\rangle)).$$

Dann gilt[30]

---

[28] Eindimensionale G-Moduln sind durch deren Charaktere bis auf Isomorphie eindeutig festgelegt. Zu jedem Charakter gibt es einen inversen Charakter. Das Produkt der beiden ist der triviale Charakter (zum trivialen G-Modul).

[29] Beide Vektorräume haben dieselbe Dimension 1. Falls $u_1\wedge\ldots\wedge u_d$ ungleich Null ist, so sind die Vektoren $u_1,\ldots,u_d$ linear unabhängig, bilden also eine Basis von $V^\vee$. Sei $v_1,\ldots,v_d$ die dazu duale Basis von V, Dann ist $(\langle u_i, v_j\rangle)$ die Einheitsmatrix, also

$$\det(\langle u_i, v_j\rangle) = 1$$

ungleich Null, d.h. $u_1\wedge\ldots\wedge u_d$ liegt nicht im Kern der Abbildung. Diese ist somit ein Isomorphismus.

[30] Die Identität besteht trivialerweise, wenn die u_i linear abhängig sind (dann steht auf beiden Seiten Null). Wir können also annehmen, die u_i bilden eine Basis von $V^\vee$. Wir wählen die v_i derart, daß sie gerade die zugehörige duale Basis von V bilden. Dann ist

$$u_{\pi(1)}\otimes\ldots\otimes u_{\pi(d)}: V^{\otimes d} \longrightarrow k$$

die k-lineare Abbildung, welche $v_{\pi(1)}\otimes\ldots\otimes v_{\pi(d)}$ in die 1 und alle anderen Tensorprodukte der v_i in die Null abbildet. Weil die Tensorprodukte der u_j eine Basis von $(V^{\otimes d})^\vee$ bilden, ist $\phi^\vee(u_1\wedge\ldots\wedge u_d)$ eine k-Linearkombination dieser Tensorprodukte.

Zum Beweis der Identität reicht es zu zeigen,

1. $\phi^\vee(u_1\wedge\ldots\wedge u_d)(v_{\pi(1)}\otimes\ldots\otimes v_{\pi(d)}) = \mathrm{sgn}(\pi).$
2. $\phi^\vee(u_1\wedge\ldots\wedge u_d)(v_{\mu_1}\otimes\ldots\otimes v_{\mu_d}) = 0$ falls ein v_μ mehrfach auftritt.

Es gilt

$$\phi^\vee(u_1\wedge\ldots\wedge u_d) = (u_1\wedge\ldots\wedge u_d)\circ\phi,$$

d.h.

$$\begin{aligned}\phi^\vee(u_1\wedge\ldots\wedge u_d)(v_{\mu_1}\otimes\ldots\otimes v_{\mu_d}) &= (u_1\wedge\ldots\wedge u_d)(\phi(v_{\mu_1}\otimes\ldots\otimes v_{\mu_d}))\\ &= (u_1\wedge\ldots\wedge u_d)(v_{\mu_1}\wedge\ldots\wedge v_{\mu_d})\\ &= \det(\langle u_i, v_{\mu_j}\rangle).\end{aligned}$$

$$\phi^{\vee}(u_1\wedge...\wedge u_d) = \sum_{\pi\in S_d} \mathrm{sgn}(\pi)\cdot u_{\pi(1)}\otimes...\otimes u_{\pi(d)}. \tag{2}$$

Dabei sei S_d die Gruppe der Permutationen der Menge $\{1,2,...,d\}$ und $\mathrm{sgn}(\pi)$ das Vorzeichen der Permutation π.
Wir bezeichnen mit

$$\det_V$$

den Charakter zum 1-dimensionalen G-Modul $(\wedge^d V)$ (vgl. (ii)), d.h. es sei

$$a(\det_V) = a_{\wedge^d V}(e_{\wedge^d V\otimes(\wedge^d V)^{\vee}}) .$$

Dann gilt für beliebige $v_1,...,v_d \in V$ und beliebige $u_1,...,u_d \in V^{\vee}$:

$$\det(a_V(v_i\otimes u_j)) = \det(<v_i, u_j>)\cdot a(\det_V) \tag{3}$$

Beweis von (3). Es gilt

$$\det(a_V(v_i\otimes u_j)) = \sum_{\pi\in S_d} \mathrm{sgn}(\pi)\cdot a_V(v_1\otimes u_{\pi(1)})\cdot...\cdot a_V(v_d\otimes u_{\pi(d)})$$

$$= a_{V\otimes d}((v_1\otimes...\otimes v_d)\otimes(u_{\pi(1)}\otimes...\otimes u_{\pi(d)}) \qquad \text{(nach 2.5.5(2))}$$

$$= a_{V\otimes d}((v_1\otimes...\otimes v_d)\otimes(\sum_{\pi\in S_d} \mathrm{sgn}(\pi)\cdot u_{\pi(1)}\otimes...\otimes u_{\pi(d)}) \qquad (a_{V\otimes d} \text{ ist linear})$$

$$= a_{V\otimes d}((v_1\otimes...\otimes v_d)\otimes\phi^{\vee}(u_1\wedge...\wedge u_d) \qquad \text{(nach (2))}$$

$$= a_{\wedge^d V}(\phi(v_1\otimes...\otimes v_d)\otimes u_1\wedge...\wedge u_d) \qquad \text{(nach 2.5.5(1))}$$

$$= a_{\wedge^d V}(u_1\wedge...\wedge u_d\otimes u_1\wedge...\wedge u_d) \qquad \text{(nach (1))}$$

Seien

$$e_1,...,e_d \in V$$

eine Basis von V und

$$x_1,...,x_d \in V^{\vee}$$

die zugehörige duale Basis. Wir führen Koordinaten der gegebenen Vektoren v_i und u_i bezüglich dieser Basen ein, sagen wir

$$v_i = \sum_{\alpha=1}^{d} v_{i\alpha}\cdot e_\alpha , \ v_{i\alpha} = < v_i, x_\alpha > = x_\alpha(v_i)$$

$$u_i = \sum_{\beta=1}^{d} u_{i\beta}\cdot x_\beta , \ u_{i\beta} = < e_\beta, u_i > = u_i (e_\beta)$$

Falls ein v_μ mehrfach auftritt, hat die Determinante zwei gleich Spalten, ist also Null. Falls nicht, bilden die Spalten eine Permutation der Standard Einheitsvektoren und die Derminante ist gleich dem Vorzeichen diesser Permutation.

Dann ist die zu $e_1\wedge\ldots\wedge e_d \in \wedge^d V$ duale Basis von $(\wedge^d V)^\vee$ gerade $x_1\wedge\ldots\wedge x_d$, denn

$$<e_1\wedge\ldots\wedge e_d, x_1\wedge\ldots\wedge x_d> = x_1(e_1)\bullet\ldots\bullet x_d(e_d) = 1,$$

d.h. $(e_1\wedge\ldots\wedge e_d)\otimes(x_1\wedge\ldots\wedge x_d)$ ist der natürliche Basisvektor von $\wedge^d V\otimes(\wedge^d V)^\vee$,

$$e_{\wedge^d V\otimes(\wedge^d V)^\vee} = (e_1\wedge\ldots\wedge e_d)\otimes(x_1\wedge\ldots\wedge x_d).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} v_1\wedge\ldots\wedge v_d &= (\sum_{\alpha=1}^d v_{1,\alpha}\bullet e_\alpha)\wedge\ldots\wedge(\sum_{\alpha=1}^d v_{d,\alpha}\bullet e_\alpha) \\ &= \det(v_{ij})\bullet e_1\wedge\ldots\wedge e_d \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} u_1\wedge\ldots\wedge u_d &= (\sum_{\beta=1}^d u_{1,\beta}\bullet x_\beta)\wedge\ldots\wedge(\sum_{\beta=1}^d u_{d,\beta}\bullet x_\beta) \\ &= \det(u_{ij})\bullet x_1\wedge\ldots\wedge x_d \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \det(a_V(v_i\otimes u_j)) &= \det(v_{ij})\bullet\det(u_{ij})\bullet a_{\wedge^d V}(e_1\wedge\ldots\wedge e_d\otimes x_1\wedge\ldots\wedge x_d) \\ &= \det(v_{ij})\bullet\det(u_{ij})\bullet a_{\wedge^d V}(e_{\wedge^d V\otimes(\wedge^d V)^\vee}) \\ &= \det(v_{ij})\bullet\det(u_{ij})\bullet a(\det_V). \end{aligned}$$

Wir haben noch zu zeigen

$$\det(v_{ij})\bullet\det(u_{ij}) = \det(<v_i, u_j>).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} <v_i, u_j> &= <v_i, \sum_{\beta=1}^d u_{j\beta}\bullet x_\beta> \\ &= \sum_{\beta=1}^d u_{j\beta}\bullet<v_i, x_\beta> \\ &= \sum_{\beta=1}^d u_{j\beta}\bullet<\sum_{\alpha=1}^d v_{i\alpha}\bullet e_\alpha, x_\beta> \\ &= \sum_{\beta=1}^d\sum_{\alpha=1}^d u_{j\beta}\bullet v_{i\alpha}\bullet<e_\alpha, x_\beta> \\ &= \sum_{\beta=1}^d\sum_{\alpha=1}^d u_{j\beta}\bullet v_{i\alpha}\bullet\delta_{\alpha\beta} \\ &= \sum_{\alpha=1}^d u_{j\alpha}\bullet v_{i\alpha} \end{aligned}$$

Für die zugehörigen d×d-Matrizen folgt

$$(<v_i, u_j>) = (u_{ij})\bullet(v_{ij})^T,$$

also

$$\det(\langle v_i, u_j\rangle) = \det(u_{ij})\bullet\det(v_{ij}).$$

QED.

2.5.7 Theorem: Rekonstruktion von k[G] aus dem Ring $\mathcal{A}$

Seien G eine lineare algebraische Gruppe über dem Körper k und $\mathcal{A}$ die in 2.5.5 aus den rationalen Darstellungen von G konstruierte k-Algebra. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) $\mathcal{A}$ ist eine endlich erzeugte k-Algebra.

(ii) Es gibt einen surjektiven k-Algebra-Homomorphismus $\phi:\mathcal{A} \twoheadrightarrow A := k[G]$ mit

$$\phi\circ a_V = \psi_V$$

für jeden G-Modul V.

(iii) Ker(ϕ) ist gerade das Ideal der nilpotenten Elemente von $\mathcal{A}$.

Beweis. Zu (i).

1. Schritt. Die k-Algebra $\mathcal{A}$ wird erzeugt von den Unterräumen der Gestalt

$$a_W(W\otimes W^\vee),$$

wobei W die endlich-dimesionalen k-linearen und G-stabilen Unterräume von A := k[G] durchläuft.

Nach Definition wird $\mathcal{A}$ von den $a_V(V\otimes V^\vee)$ erzeugt, wenn V die G-Moduln durchläuft.

Sei V ein G-Modul. Wir wählen eine Basis des Duals $V^\vee = \operatorname{Hom}_k(V, k)$, sagen wir

$$u_1,\dots,u_d \in V^\vee.$$

Wir betrachten die Homomorphismen von lokal endlichen G-Moduln

$$\phi_{u_i}: V \longrightarrow A,\ v \mapsto (g \mapsto u_i(g\bullet v)),$$

von 2.5.2. Weil A ein lokal endlicher G-Modul ist, gibt es einen endlich-dimensionalen k-linearen Unterraum

$$W \subseteq A,$$

welcher stabil ist unter der Operation von G und welcher die endlich vielen endlich-dimensionalen Bilder der ϕ_{u_i} enthält, sodaß man die ϕ_{u_i} als Homomorphismen von G-Moduln

$$\phi_{u_i}: V \longrightarrow W$$

betrachten kann. Zusammen definieren diese einen Homomorphismus von G-Moduln

$$\phi:\ V \rightarrowtail W^d,\ v \mapsto (\phi_{u_1}(v), \dots, \phi_{u_d}(v)).$$

Der Kern von ϕ ist trivial: aus $\phi_{u_i}(v) = 0$ für alle i, d.h. $u_i(g\bullet v)) = 0$ für alle $g\in G$ und alle i folgt $u(g\bullet v)) =$[31] 0 für alle $u \in V^\vee$ und alle $g\in G$, also $g\bullet v = 0$ für alle $g\in G$, also $v = 0$. Der G-Modul-Homomorphismus ϕ ist somit injektiv. Das Dual von ϕ,

$$\phi^\vee: (W^d)^\vee \twoheadrightarrow V^\vee,$$

ist somit surjektiv. Jedes $u \in V^\vee$ hat somit die Gestalt

---

[31] Weil die u_i den Raum $V^\vee$ erzeugen.

$$u = \phi^\vee(t_1,\dots,t_d) \text{ mit } t_i \in W^\vee$$

(wenn wir wie bisher $(W^d)^\vee$ mit $(W^\vee)^d$ identifizieren).
Mit $v \in V$ gilt

$$\begin{aligned} a_V(v\otimes u) &= a_V(v\otimes\phi^\vee(t_1,\dots,t_d)) \\ &= a_{W^n}(\phi(v)\otimes(t_1,\dots,t_d)) \qquad \text{(nach 2.5.5 (1))} \end{aligned}$$

Wir schreiben

$$\phi(v) = (w_1,\dots,w_d) \in W^d$$

und bezeichnen mit

$$q_i\colon W \longrightarrow W^d \text{ bzw. } r_i\colon W^d \longrightarrow W$$

Die natürlichen Einbettungen, welche W mit den i-ten direkten Summanden von W^d identifizieren bzw. die Projektionen auf den i-ten direkten Summanden. Es gilt

$$\phi(v) = (w_1,\dots,w_d) = \sum_{i=1}^d q_i\,(w_i)$$

und

$$(t_1,\dots,t_d) = \sum_{j=1}^d (r_j)\,(t_j).$$

Wir setzen ein und erhalten

$$\begin{aligned} a_V(v\otimes u) &= a_{W^n}((\sum_{i=1}^d q_i\,(w_i))\otimes(\sum_{j=1}^d (r_j)^\vee(t_j))) \\ &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a_{W^n}(q_i(w_i)\otimes(r_j)^\vee(t_j)). \end{aligned}$$

Die q_i und r_i sind G-Modul-Homomorphismen. Nach 2.5.5 (1) folgt

$$\begin{aligned} a_V(v\otimes u) &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a_W(\,r_j(q_i(w_i))\otimes t_j) \\ &= \sum_{i=1}^d a_W(w_i\otimes t_i). \end{aligned}$$

Die letzte Identität zeigt, die k-Algebra $\mathcal{A}$ wird erzeugt von den G-Teilmoduln der Gestalt

$$a_W(W\otimes W^\vee),$$

wobei W die endlich-dimensionalen G-stabilen k-linearen Unterräume von A = k[G] durchläuft.

2. Schritt. Sei $V \subseteq A := k[G]$ ein endlich-dimensionaler k-linearer Unteraum von A, welcher die k-Algebra A erzeugt, das Einselement von A enthält und G-stabil ist (ein solcher Raum existsiert). Dann wird die Algebra $\mathcal{A}$ erzeugt von

$$a_V(V\otimes V^\vee)$$

(d.h. es gilt die Aussage von (i)).
Für jede natürliche Zahl n betrachten wir die Abbildung

$$V^{\otimes n} \longrightarrow A,\ v_1\otimes\ldots\otimes v_n \mapsto v_1\bullet\ldots\bullet v_n, \tag{1}$$

und bezeichnen mit V_n deren Bild. Wegen $1\in V$ gilt

$$V_n \subseteq V_{n+1},$$

und weil V die k-Algebra A erzeugt, gilt

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n .$$

Damit gibt es für jeden endlich-dimensionalen G-Teilmodul $W \subseteq A$ eine natürliche Zahl n mit

$$W \subseteq V_n.$$

Damit bestehen die folgenden Inklusionen.

$$a_W(W\otimes W^\vee) \subseteq a_{V_n}(V_n\otimes(V_n)^\vee) \subseteq A_{V^{\otimes n}}(V^{\otimes n}\otimes(V^{\otimes n})^\vee). \tag{2}$$

Die erste Inklusion besteht, weil die natürliche Einbettung $q: W \hookrightarrow V_n$ und damit auch die natürliche Surjektion $q^\vee: (V_n)^\vee \longrightarrow W^\vee$ ein Homomorphismus von G-Moduln ist, sodaß für $w \in W$ und $t \in W^\vee$ gilt

$$\begin{aligned}
a_W(w\otimes t) &= a_W(w\otimes q^\vee(u)) && (\text{mit } u\in(q^\vee)^{-1}(t) \subseteq (V_n)^\vee)\\
&= a_{V_n}(q(w)\otimes u) && (\text{nach } 2.5.5\ (1))\\
&\in a_{V_n}(V_n\otimes(V_n)^\vee)
\end{aligned}$$

Die zweite Inklusion besteht, weil (1) einen surjektiven Homomorphismus von G-Moduln

$$p: V^{\otimes n} \longrightarrow V_n$$

definiert. Jedes $v \in V_n$ hat deshalb die Gestalt $v = p(w)$ mit $w \in V^{\otimes n}$. Mit $u\in(V_n)^\vee$ ist deshalb

$$\begin{aligned}
a_{V_n}(v\otimes u) &= a_{V_n}(p(w)\otimes u)\\
&= a_{V^{\otimes n}}(w\otimes p^\vee(u)) && (\text{nach } 2.5.5\ (1))\\
&\in a_{V^{\otimes n}}(V^{\otimes n}\otimes(V^{\otimes n})^\vee).
\end{aligned}$$

Nach Definition der Multiplikation in $\mathcal{A}$ (vgl. 2.5.5 (2)) liegt

$$a_{V^{\otimes n}}(V^{\otimes n}\otimes(V^{\otimes n})^\vee)$$

ganz in der von

$$a_V(V\otimes V^\vee)$$

erzeugten k-Teilalgebra von $\mathcal{A}$. Wegen (2) und und dem ersten Schritt ist diese k-Teilalgebra aber gleich $\mathcal{A}$, d.h. es gilt die Aussage des zweiten Schritts und damit die Aussage von (i).

Zu (ii). In 2.5.4 haben wir für jeden G-Modul V die k-lineare Abbildung

$$\psi_V: V\otimes V^\vee \longrightarrow A,\ v\otimes u \mapsto \phi_u(v),$$

konstruiert. Diese Abbildungen setzen sich zusammen zu einer k-linearen Abbildung auf der direkten Summe $\mathcal{F}$ von 2.5.5, sagen wir

$$\psi: \mathcal{F} \longrightarrow A,$$

mit

$$\psi \circ i_V = \psi_V \tag{3}$$

für jeden G-Modul V. Für jeden Homomorphismus ϕ: $V \longrightarrow W$ von G-Moduln gilt nach 2.5.4 (ii)

$$\psi \circ (i_V \circ (id \otimes \phi^\vee) - i_W \circ (\phi \otimes id)) = \psi_V \circ (id \otimes \phi^\vee) - \psi_W \circ (\phi \otimes id)) = 0.$$

Deshalb wir der lokal endliche G-Teilmodul $\mathcal{R}$ von $\mathcal{F}$ bei ψ in die Null abgebildet. Die Abbildung ψ faktorisiert sich über $\mathcal{A} = \mathcal{F}/\mathcal{R}$ und induziert so eine k-lineare Abbildung

$$\tilde{\psi}: \mathcal{A} \longrightarrow A,\ a_V(v \otimes u) \mapsto \psi(i_V(v \otimes u)) = \phi_u(v).$$

Für je zwei G-Moduln V und W und Elemente $v \in V$, $w \in W$, $u \in V^\vee$, $t \in W^\vee$ gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}(a_V(v\otimes u)\bullet a_W(w\otimes t)) &= \tilde{\psi}(a_{V\otimes W}((v\otimes w)\otimes(u\otimes t))) && \text{(vgl. 2.5.5 (2))}\\
&= \psi(i_{V\otimes W}((v\otimes w)\otimes(u\otimes t))) && \text{(Definition von } \tilde{\psi})\\
&= \psi_{V\otimes W}((v\otimes w)\otimes(u\otimes t)) && \text{(Definition von } \psi)\\
&= m(\psi_V\otimes\psi_W)(v\otimes u\otimes w\otimes t) && \text{(nach 2.5.4(iii))}\\
&= m(\psi_V(v\otimes u)\otimes\psi_W(w\otimes t) && \\
&= \psi_V(v\otimes u)\bullet\psi_W(w\otimes t) && \text{(Definition von m in 2.5.4(iii))}\\
&= \tilde{\psi}(a_V(v\otimes u))\bullet \tilde{\psi}(a_W(w\otimes t)).
\end{aligned}$$

Mit anderen Worten, $\tilde{\psi}$ ist ein Ring-Homomorphismus. Wir bezeichnen mit die zur Basis $1 \in k$ über k duale Basis ebenfalls mit 1. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}(a_I(1\otimes 1)) &= \psi(i_I(1\otimes 1)) && \text{(Definition von } \tilde{\psi})\\
&= \psi_I(1\otimes 1) && \text{(Definition von } \psi)\\
&= \phi_1(1) && \text{(Definition von } \psi_I)
\end{aligned}$$

Auf Grund der Definition von ϕ_u in 2.5.2 ist $\phi_1(1) \in A$ die Abbildung

$$G \longrightarrow k,\ g \mapsto 1(g\bullet 1) = 1(1),$$

(denn G operiert auf A = k[G] durch Rechtstranslationen, d.h. $g\bullet 1 = 1$). Damit ist $\tilde{\psi}$ ein Homomorphismus von Ringen mit 1. Als k-lineare Abbildung ist damit $\tilde{\psi}$ ein k-Algebra-Homomorphismus. Wegen (3) gilt

$$\tilde{\psi} \circ a_V = \psi_V.$$

Wir haben noch zu zeigen, daß

$$\tilde{\psi}: \mathcal{A} \longrightarrow A,\ a_V(v \otimes u) \mapsto \phi_u(v),$$

surjektiv ist. Seien $v \in A := k[G]$ und $V \subseteq A$ ein k-linearer G-stabiler Unterraum von endlicher Dimension, der die reguläre Funktion v enthält,

$$v \in V \subseteq A, \dim_k V < \infty, V \text{ G-stabil.}$$

Die Auswertung im neutralen Elment $e \in G$,

$$\varphi_e: A = k[G] \longrightarrow k, f \mapsto f(e),$$

ist ein k-Algebra-Homomorphismus. Die Einschränkung auf V,

$$u := \varphi_e|_V: V \longrightarrow k,$$

ist ein k-lineare Abbildung, d.h. ein Element des Duals von V,

$$u \in V^\vee,$$

Es gilt für jedes $g \in G$

$$\begin{aligned}
\phi_u(v)(g) &= u(gv) && \text{(Definition von } \phi_u\text{)}\\
&= \varphi_e(gv) && \text{(wegen } u = \varphi_e|_V\text{)}\\
&= (gv)(e) && \text{(Definition von } \varphi_e\text{)}\\
&= v(eg) && \text{(G operiert auf A durch Rechtstranslation)}\\
&= v(g) && \text{(e ist neutrales Element von G).}
\end{aligned}$$

Weil dies für jedes $g \in G$ gilt, folgt

$$\phi_u(v) = v,$$

also

$$\begin{aligned}
\widetilde{\psi}(a_V(v \otimes u)) &= \phi_u(v)\\
&= v.
\end{aligned}$$

Das vorgegebene Element $v \in A$ liegt also im Bild von $\widetilde{\psi}$. Wir haben gezeigt, $\widetilde{\psi}$ ist surjektiv.

<u>Zu (iii)</u>. Weil das einzige nilpotente Element von A gleich 0 ist, liegen alle nilpotenten Elemente von $\mathcal{A}$ im Kern der Abbildung $\phi: \mathcal{A} \longrightarrow A$: ist $a \in \mathcal{A}$ nilpotent, d.h. gibt es eine natürliche Zahl n mit $a^n = 0$, so ist

$$\phi(a)^n = \phi(a^n) = \phi(0) = 0.$$

Weil es in A mit Ausnahme von 0 keine nilpotenten Elemente gibt, folgt $\phi(a) = 0$. Wir haben gezeigt,

$$a \in \mathcal{A} \text{ nilpotent} \Rightarrow a \in \operatorname{Ker}(\phi).$$

Sei $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{A}$ das Ideal der nilpotenten Elemente von $\mathcal{A}$. Die Abbildung ϕ faktorisiert sich dann über $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ und induziert einen surjektiven k-Algebra-Homomorphismus

$$\overline{\phi}: \mathcal{A}/\mathcal{N} \twoheadrightarrow A.$$

Weil die Algebra $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ endlich erzeugt und reduziert ist, ist sie Koordinatenring einer affinen Varietät, sagen wir

$$\mathcal{A}/\mathcal{N} = k[X],$$

und $\overline{\phi}$ induzierten eine abgeschlossene Einbettung affiner Varietäten

$$\overline{\phi}^\#: G \hookrightarrow X.$$

Es reicht zu zeigen, diese Abbildung ist surjektiv (also bijektiv), denn dann ist auch $\overline{\phi}$ bijektiv, also ein Isomorphismus.

Sei $\xi: \mathcal{A} \longrightarrow k$ ein k-Algebra-Homomorphismus. Weil $\mathcal{N}$ im Kern von ξ liegt, können wir ξ als Auswertungsabbildung in einem Punkt von X betrachten, den wir ebenfalls mit ξ bezeichnen.[32]

Für jeden G-Modul V und jedes Element $v \in V$ ist die Abbildung

$$V^\vee \longrightarrow k,\ u \mapsto \xi(a_V(v\otimes u),$$

k-linear. Weil die Dualitätspaarung

$$<,>_V: V\times V^\vee,\ <v', \ell'> \mapsto \ell'(v'),$$

nicht entartet ist, hat jede Linearform auf $V^\vee$ die Gestalt $< v'', ? >$ mit $v'' \in V$. Es gibt also ein $v'' := \alpha_V(v)$ mit

$$a_V(v\otimes u)(\xi) = \xi(a_V(v\otimes u)) = < \alpha_V(v), u > \text{ für jedes } u \in V^\vee.$$

Insbesondere erhalten wir für Basen

$$v_1,\dots, v_d \text{ von V und } u_1,\dots,u_d \text{ von } V^\vee,$$

die Identitäten

$$\xi(a_V(v_i\otimes u_j) = < \alpha_V(v_i), u_j >.$$

Aus 2.5.6 (3),

$$\det (a_V(v_i\otimes u_j)) = \det (<v_i, u_j>)\cdot a(\det_V),$$

lesen wir ab, daß $\det (a_V(v_i\otimes u_j))$ ein umkehrbares Element von $\mathcal{A}$ ist (vgl. 2.5.6 (ii) und (iii)). Deshalb ist die Matrix (mit Einträgen in k),

$$(a_V(v_i\otimes u_j)(\xi)) = (< \alpha_V(v_i), u_j >),$$

umkehrbar, und $\alpha_V: V \longrightarrow V$ ist eine umkehrbare k-lineare Abbildung.

Zeigen wir, die Familie der Abbildungen $\alpha_V \in \mathbf{GL}(V)$ genügt den Bedingungen des Satzes 2.5.3 von Tannaka.

Bedingung 1 von 2.5.3 ist erfüllt.

Seien V und W zwei G-Moduln. Dann ist $\alpha_{V\otimes W}$ definiert durch die Bedinung, daß

$$< \alpha_{V\otimes W} (v\otimes w), u\otimes t > = a_{V\otimes W} (v\otimes w\otimes u\otimes t)(\xi)$$

gilt für $v\in V$, $w\in W$, $u\in V^\vee$, $t\in W^\vee$. Die rechte Seite dieser Identität können wir auch in der folgenden Gestalt schreiben.

$$a_{V\otimes W} (v\otimes w\otimes u\otimes t) = a_V(v\otimes u)\cdot a_W(w\otimes t) \quad \text{(Definition der Multiplikation von } \mathcal{A})$$

d.h.

$$a_{V\otimes W} (v\otimes w\otimes u\otimes t)(\xi) = a_V(v\otimes u)(\xi)\cdot a_W(w\otimes t)(\xi)$$

---

[32] Genauer: $\xi: \mathcal{A} \longrightarrow k$ ist die Zusammensetzung der natürlichen Surjektion

$$\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{N} = k[X]$$

mit der Auswertung im Punkt $\xi\in X$. Für $f \in \mathcal{A}$ werden wir deshalb auch $\xi(f) = f(\xi)$ schreiben.

$= < \alpha_V(v), u > \bullet < \alpha_W(w), t >$

$= <(\alpha_V \otimes \alpha_W)(v\otimes w), u\otimes t >.$

Es folgt

$$< \alpha_{V\otimes W}(v\otimes w), u\otimes t > = <(\alpha_V \otimes \alpha_W)(v\otimes w), u\otimes t >.$$

Weil dies für alle v,w,u,t gilt, folgt

$$\alpha_{V\otimes W} = \alpha_V \otimes \alpha_W ,$$

wie behauptet.

Bedingung 2 von 2.5.3 ist erfüllt.

Sei ϕ:V⟶W ein Homomorphismus von G-Moduln. Dann gilt für v∈V und $t\in W^\vee$

$< \alpha_W(\phi(v)), t >$	$= a_W(\phi(v)\otimes t)(\xi)$	(Definition von α_W)
	$= a_V(v\otimes\phi^\vee(t))(\xi)$	(nach 2.5.5 (2))
	$= <\alpha_V(v), \phi^\vee(t)>$	(Definition von α_V)
	$= <\alpha_V(v), t\circ\phi>$	(Definition $\phi^\vee$)
	$= (t\circ\phi)(\alpha_V(v))$	(Definition der Dualitätspaarung < , >)
	$= t(\phi(\alpha_V(v))$	
	$= < \phi(\alpha_V(v), t >$	(Definition der Dualitätspaarung < , >)

Da dies für alle t gilt und die Dualitätspaarung nicht entartet ist, folgt

$\alpha_W(\phi(v)) \quad = \phi(\alpha_V(v).$

Da dies für alle v gilt, folgt

$\alpha_W\circ\phi \quad = \phi\circ\alpha_V,$

wie behauptet.

Bedingung 3 von 2.5.3 ist erfüllt.

Sei I der triviale G-Modul. Dann gilt für v∈I = k und $u\in I^\vee = \mathrm{Hom}_k(k,k)$

$<\alpha_I(v), u>$	$= a_I(v\otimes u)(\xi)$	(nach Definition von a_I)
	$= \xi(a_I(v\otimes u))$	

Man beachte, ξ bezeichnet sowohl einen Punkt als auch die zugehörige Auswertungsabbildung. Wir können v und u als Elemente von k betrachten, wenn wir u∈K mit der Multiplikation mit u (aus $I^\vee$) identifizieren. Weil ξ und a_I beides k-lineare Abbildungen sind, folgt

$<\alpha_I(v), u> \quad = u\bullet v\bullet\xi(a_I(1\otimes 1))$

Weil $a_I(1\otimes 1)$ das Einselement von $\mathcal{A}$ und $\xi:\mathcal{A}\longrightarrow A$ ein k-Algebra-Homomorphismus ists, folgt

$<\alpha_I(v), u> \quad = u\bullet v\bullet 1$

$= u\bullet v$

$= <v, u >$

Da dies für alle $u \in I^\vee$ gilt und die Dualitätspaarung nicht-entartet ist, folgt

$$\alpha_I(v) = v$$

für jedes $v \in I$, d.h.

$$\alpha_I: I \longrightarrow I$$

ist die identische Abbildung wie behauptet.

Wir haben gezeigt, die $\alpha_V \in \mathbf{GL}(V)$ genügen den Bedingungen des Satzes 2.5.3 von Tannaka. Es gibt also ein $x \in G$ mit der Eigenschaft, daß für jeden G-Modul V gilt

$$\alpha_V = r_V(x): V \longrightarrow V.$$

Abkürzend schreiben wir

$$\alpha_V(v) = x \bullet v \quad \text{für } v \in V.$$

Wir beizeichnen im folgenden auch die Auswertung im Punkt x mit x. Für $v \in V$ und $u \in V^\vee$ gilt dann

$$\begin{aligned}
x(\psi_V(v\otimes u)) &= (\psi_V(v\otimes u))(x) && (\psi_V: V\otimes V \longrightarrow A \text{ wie in 2.5.4}) \\
&= \phi_u(v)(x) && (\text{Definition von } \psi_V \text{ in 2.5.4}) \\
&= \langle x\bullet v, u\rangle && (\text{Definition von } \phi_u \text{ in 2.5.2}) \\
&= \langle \alpha_V(v), u\rangle && (\text{Wahl von } x) \\
&= \xi(a_V(v\otimes u)) && (\text{Definition von } \alpha_V)
\end{aligned}$$

Nach (ii) können wir diese Identität auch in der Gestalt

$$x(\phi(a_V(v\otimes u))) = \xi(a_V(v\otimes u))$$

schreiben. Da dies für alle G-Moduln V und Elemente $v \in V$, $u \in V^\vee$ gilt und weil die Elemente der Gestalt $a_V(v\otimes u)$ die k-Algebra $\mathcal{A}$ erzeugen (und x, ϕ und ξ Algebra-Homomorphismen sind), folgt

$$x \circ \phi = \xi,$$

d.h. wir erhalten ein kommutatives Diagramm von k-Algebra-Homorphismen

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, two heads, "\phi"] \arrow[dr, "\xi"'] & A \arrow[d, "x"] \\
& k
\end{tikzcd}$$

Insbesondere gilts

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(\xi) &= \xi^{-1}(0) \\
&= \phi^{-1}(x^{-1}(0)) \\
&= \phi^{-1}(\mathrm{Ker}(x))
\end{aligned}$$

Betrachtenwir die durch ϕ induzierte Abbildung der maximalen Spektren

$$\phi^\#: \mathrm{Specm}\, \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{Specm}\, A,\ p \mapsto \phi^{-1}(p).$$

Wegen A = k[G] können wir Specm A mit der affinen algebraischen Varietät G identifizieren. Weil jedes nilpotente Element in jedem Primideal liegt, also $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{A}$ in jedem Primideal von $\mathcal{A}$ enthalten ist, könne wir Specm $\mathcal{A}$ identifizieren mit

$$\text{Specm } \mathcal{A} = \text{Specm } \mathcal{A}/\mathcal{N} = \text{Specm } k[X] = X.$$

Die Abbildung $\phi^{\#}$ wird dann zu einem Morphismus affiner Varietäten

$$\phi^{\#}: G \longrightarrow X.$$

Weil ϕ surjektiv ist, ist $\phi^{\#}$ eine abgeschlossene Einbettung (d.h. G wird mit einer abgeschlossenen Teilmenge der affinen Varietät X identifiziert. Der vorgegeben k-Algebra-Homomorphismus ξ ist gerade ein vorgegebener Punkt von X, welcher dem Primideal Ker(ξ) entspricht). Wir haben gezeigt, es gibt zu diesem Punkt ξ von X einen Punkt x von G mit $\phi^{\#}(x) = \xi$, d.h. $\phi^{\#}$ ist surjektiv, d.h. die Abgeschlossene Teilmenge G von X ist gleich X. Der Morphismus algebraischer Varietäten $\phi^{\#}$ ist ein Isomorphismus. Die induzierte Abbildung der Koordinatenringe

$$\mathcal{A}/\mathcal{N} \longrightarrow A$$

ist deshalb ebenfalls ein Isomorphismus, wie behauptet.
QED.

2.5.8 Bemerkungen

(i) Auch die Komultiplikation und die antipodale Abbildung

$$\Delta: A \longrightarrow A\otimes A \text{ und } i: A \longrightarrow A,\ A := k[G],$$

der linearen algebraischen Gruppe G lassen sich aus ähnlichen Homomorphismen der k-Algebra $\mathcal{A}$ rekonstruieren. Seien nämlich V ein G-Modul,

$$v_1,\dots,v_d \in V$$

eine k-Vektorraumbasis von V und

$$u_1,\dots,u_d \in V^\vee$$

die zugehörige duale Basis, so daß $< v_i , u_j > = \delta_{ij}$ gilt. Wir betrachten die k-lineare Abbildung

$$\widetilde{\Delta}: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}\otimes\mathcal{A},\ a_V(v\otimes u) \mapsto \sum_{i=1}^{d} a_V(v\otimes u_i)\otimes a_V(v_i\otimes u).$$

Man kann zeigen, dies ist ein k-Algebra-Homomorphismus, und es gilt[33]

$$(\phi\otimes\phi)\circ\widetilde{\Delta} = \Delta\circ\phi,$$

wenn $\phi: \mathcal{A} \longrightarrow A$, die Abbildung von 2.5.7 (ii) bezeichnet. Mit anderen Worten, wäre $\widetilde{\Delta}$ die Komultiplikation einer Gruppen-Struktur auf Specm $\mathcal{A}$ so wäre die durch ϕ induzierte Abbildung $\phi^{\#}$: Specm A $\longrightarrow$ Specm $\mathcal{A}$ der maximalen Spektren ein Gruppen-Homomorphismus.

---

[33] Beim Beweis dieser Identität im dritten Schritt gibt es ein Problem. Entweder enthält der Beweis einen Rechenfehler, oder man muß die obige Defintion von $\widetilde{\Delta}$ abändern zu

$$\widetilde{\Delta}: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}\otimes\mathcal{A},\ a_V(v\otimes u) \mapsto \sum_{i=1}^{d} a_V(v_i\otimes u)\otimes a_V(v\otimes u_i)$$

Weiter betrachten wir die k-lineare Abbildung

$$\tilde{i} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A},\ a_V(v\otimes u) \mapsto a_{V^\vee}(u\otimes v).$$

Man kann dann zeigen, $\tilde{i}$ ist ein k-Algebra-Homomorphismus, und es gilt

$$\phi\circ\tilde{i} = i\circ\phi,$$

d.h. $\tilde{i}$ induziert den Antipoden auf A.

(ii) Für die Abbildungen $\tilde{\Delta}$ und $\tilde{i}$ sind die Diagramme von 2.1.2 kommutativ, wenn man dort die Algebra A durch $\mathcal{A}$ ersetzt. Mit anderen Worten, $\mathcal{A}$ und die Abbildungen $\tilde{\Delta}$ und $\tilde{i}$ definieren ein Gruppen-Schema über k (vg. 2.1.6 (a)). Im Fall

$$\mathrm{Char}(k) = 0$$

ist die k-Algebra $\mathcal{A}$ nach einem Satz von Cartier (vgl. Demazure & Gabriel [1, Kapitel II,§6, no.1, L1]) reduziert. In diesem Fall ist der Homomorphismus ϕ von 2.5.7(ii) ein Isomorphismus.

Beweis. Zu (i). 1.Schritt. $\tilde{\Delta}$ ist korrekt definiert und unabhängig von der speziellen Wahl der k-Vektorraumbasen $v_1,...,v_d \in V$ der G-Moduln V.

Sei V ein G-Modul. Dann ist

$$V\times V^\vee \longrightarrow (V\otimes V^\vee)\otimes(V\otimes V^\vee),\ (v, u) \rightarrowtail \sum_{i=1}^{d} (v\otimes u_i)\otimes a_V(v_i\otimes u),$$

eine wohldefinierte und über k-Binlineare Abbildung, induziert also eine k-lineare Abbildung

$$V\otimes V^\vee \longrightarrow (V\otimes V^\vee)\otimes(V\otimes V^\vee),\ (v, u) \rightarrowtail \sum_{i=1}^{d} (v\otimes u_i)\otimes (v_i\otimes u),$$

Durch Zusammensetzen mit dem Tensorprodukt $a_V\otimes a_V$ der k-linearen Abbildung

$$a_V: V\otimes V^\vee \longrightarrow \mathcal{A}$$

von 2.5.5 mit sich selbst erhalten wir eine k-lineare Abbildungen

$$V\otimes V^\vee \longrightarrow \mathcal{A}\otimes \mathcal{A},\ (v, u) \rightarrowtail \sum_{i=1}^{d} a_V(v\otimes u_i)\otimes a_V(v_i\otimes u).$$

für jeden G-Modul V. Die Gesamtheit dieser Abbildungen definiert eine k-lineare Abbildung auf der direkten Summe

$$\mathcal{F} := \oplus_{V \text{ ist G-Modul}} V\otimes V^\vee$$

über alle Isomorphie-Klassen von G-Moduln von 2.5.5,

$$a: \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{A}\otimes \mathcal{A},\ (v, u) \rightarrowtail \sum_{i=1}^{d} a_V(v\otimes u_i)\otimes a_V(v_i\otimes u).$$

die direkte Summe über aller Isomorphie-Klassen von G-Moduln. Für jeden Homomorphismus von G-Moduln $\phi: V \longrightarrow W$ und beliebige Elemente $v\in V$ und $t\in W^\vee$ gilt

$$a(i_V\circ(id\otimes\phi^\vee)(v\otimes \phi^\vee(t))-i_W\circ(\phi\otimes id)(v\otimes t)))$$ (vgl. die Definition von i in 2.5.5)

$=a_V(v\otimes\overset{\vee}{\phi}(t))-a_W\circ(\phi(v)\otimes t)$ (Definition von a)

$= 0$ (nach Formel (1) in 2.5.5)

Damit liegt ein Erzeugendensystem des Unterraums $\mathcal{R}$ von $\mathcal{F}$ im Kern von a, d.h. a induziert nach dem Homomorphiesatz eine k-lineare Abbildung

$$\widetilde{\Delta}: \mathcal{A} = \mathcal{F}/\mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{A}\otimes\mathcal{A},\ a_V(v\otimes u) \mapsto \sum_{i=1}^{d} a_V(v\otimes u_i)\otimes a_V(v_i\otimes u).$$

Wir haben noch zu zeigen, daß die Definition von $\widetilde{\Delta}$ nicht von der speziellen Wahl der k-Vektorraumbasis $v_1,...,v_d \in V$ abhängt. Sei

$$v'_1,...,v'_d \in V$$

eine weitere k-Vektorraumbasis von V und

$$u'_1,...,u'_d \in V^{\vee}$$

die zugehörige duale Basis. Wir können dann schreiben

$$v_i = \sum_{\alpha=1}^{d} c_{\alpha i}\cdot v'_\alpha \text{ und}$$

$$u_j = \sum_{\beta=1}^{d} d_{\beta j}\cdot u'_\beta$$

mit $c_{\alpha i}, d_{\beta i}\in k$ und

$$\begin{aligned}\delta_{ij} &= u_j(v_i)\\ &= \sum_{\alpha=1}^{d}\sum_{\beta=1}^{d} d_{\beta j}\cdot c_{\alpha i}\cdot u'_\beta(v'_\alpha)\\ &= \sum_{\alpha=1}^{d}\sum_{\beta=1}^{d} d_{\beta j}\cdot c_{\alpha i}\cdot \delta_{\alpha\beta}\\ &= \sum_{\alpha=1}^{d} d_{\alpha j}\cdot c_{\alpha i},\end{aligned}$$

d.h. die beiden Matrizen $(d_{ij})^T$ und (c_{ij}) sind invers zueinander. Damit gilt

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{d} a_V(v\otimes u_i)\otimes a_V(v_i\otimes u) &= \sum_{i=1}^{d} a_V(v\otimes \sum_{\beta=1}^{d} d_{\beta i}\cdot u'_\beta)\otimes a_V(\sum_{\alpha=1}^{d} c_{\alpha i}\cdot v'_\alpha\otimes u)\\ &= \sum_{\beta=1}^{d}\sum_{\alpha=1}^{d}\sum_{i=1}^{d} c_{\alpha i}\cdot d_{\beta i}\cdot a_V(v\otimes u'_\beta)\otimes a_V(v'_\alpha\otimes u)\\ &= \sum_{\beta=1}^{d}\sum_{\alpha=1}^{d} \delta_{\alpha\beta}\cdot a_V(v\otimes u'_\beta)\otimes a_V(v'_\alpha\otimes u)\\ &= \sum_{\alpha=1}^{d} a_V(v\otimes u'_\alpha)\otimes a_V(v'_\alpha\otimes u).\end{aligned}$$

Mit anderen Worten, wenn wir die Basis der v_i durch die der v'_i ersetzen, bleibt die Abbildung $\tilde{\Delta}$ dieselbe.

2. <u>Schritt</u>. $\tilde{\Delta}$ ist ein k-Algebra-Homomorphismus.

Nach Konstruktion ist $\tilde{\Delta}$ eine k-lineare Abbildung. Es reicht also zu zeigen, daß $\tilde{\Delta}$ multiplikativ ist, d.h. zu zeigen ist

$$\tilde{\Delta}(a_V(v\otimes u)\bullet a_W(w\otimes t)) = \tilde{\Delta}(a_V(v\otimes u))\bullet \tilde{\Delta}(a_W(w\otimes t)$$

für G-Moduln V und W und Elemente $v\in V$, $u\in V^\vee$ und $w\in W$, $t\in W^\vee$. Wir fixieren k-Vektorraumbasen

$$v_1,\ldots,v_m \in V \text{ und } w_1,\ldots,w_n \in W$$

und die zugehörigen dualen Basen

$$u_1,\ldots,u_m \in V^\vee \text{ und } t_1,\ldots,t_n \in W^\vee.$$

Dann bilden die $v_i\otimes w_j$ eine Basis von $V\otimes W$ und die $u_i\otimes t_j$ die dazugehörige duale Basis von $(V\otimes W)^\vee$(bei geeigneter Identifikation mit $V^\vee\otimes W^\vee$).

Für die linke Seite der zu beweisenden Identität erhalten wir

$$\begin{aligned}
\text{LHS} &= \tilde{\Delta}(a_{V\otimes W}((v\otimes w)\otimes(u\otimes t))) && \text{(Definition der Multiplikation in 2.5.5 (2))}\\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{V\otimes W}(v\otimes w\otimes u_i\otimes t_j)\otimes a_V(v_i\otimes w_j\otimes u\otimes t) && \text{(Definition von } \tilde{\Delta})
\end{aligned}$$

Für die rechte Seite ergibt sich

$$\begin{aligned}
\text{RHS} &= (\sum_{i=1}^{m} a_V (v\otimes u_i)\otimes a_V(v_i\otimes u))\bullet(\sum_{j=1}^{n} a_W(w\otimes t_j)\otimes a_W(w_j\otimes t)) && \text{(Definition von } \tilde{\Delta})\\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (a_V (v\otimes u_i)\otimes a_V(v_i\otimes u))\bullet(a_W(w\otimes t_j)\otimes a_W(w_j\otimes t)) && \text{(Linearität von } \tilde{\Delta})\\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} ((a_V (v\otimes u_i)\bullet a_W(w\otimes t_j))\otimes(a_V(v_i\otimes u))\bullet a_W(w_j\otimes t)) && \text{(Multiplikation in } \mathcal{A}\otimes\mathcal{A})\\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} ((a_{V\otimes W}(v\otimes w\otimes u_i\otimes t_j))\otimes(a_{V\otimes W}(v_i\otimes w_j\otimes u\otimes t))) && \text{(Multiplikation in } \mathcal{A})\\
&= \text{RHS}
\end{aligned}$$

3. <u>Schritt</u>. Es gilt $(\phi\otimes\phi)\circ\tilde{\Delta} = \Delta\circ\phi$, wenn $\phi: \mathcal{A} \longrightarrow A$, die Abbildung von 2.5.7 (ii) bezeichnet.

Wir haben zu zeigen, das folgende Diagramm von k-Algebra-Homomorphismen ist kommutativ.

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{A} & \xrightarrow{\phi} & A\\
\tilde{\Delta}\downarrow & & \downarrow\Delta\\
\mathcal{A}\otimes\mathcal{A} & \xrightarrow{\phi\otimes\phi} & A
\end{array}$$

Nach dem zweiten Schritt im Beweis von 2.5.7 (i) gibt es einen endlich-dimensionalen k-linearen und G-stabilen Unterraum

$$V \subseteq A = k[G]$$

(welcher die $1\in A$ enthält und A über k erzeugt) mit der Eigenschaft, daß die k-Algebra $\mathcal{A}$ von

$$a_V(V\otimes V^\vee)$$

erzeugt wird. Deshalb reicht es zu zeigen

$$(\phi\otimes\phi)(\widetilde{\Delta}(a_V(V\otimes V^\vee))) = \Delta(\phi(a_V(V\otimes V^\vee)) \text{ für jedes } f \in V.$$

Seien wie bisher

$$v_1,\dots, v_d \in V$$

eine k-Vektorraumbasis von V und

$$u_1,\dots, u_d \in V^\vee$$

die zugehörige duale Basis.

Für $v\in V$ und $u\in V^\vee$ gilt

$$\begin{aligned}
(\phi\otimes\phi)(\widetilde{\Delta}(a_V(v\otimes u))) &= (\phi\otimes\phi)(\sum_{i=1}^{d} a_V(v\otimes u_i)\otimes a_V(v_i\otimes u)) && \text{(Definition von } \widetilde{\Delta}) \\
&= \sum_{i=1}^{d} (\phi\otimes\phi)(a_V(v\otimes u_i)\otimes a_V(v_i\otimes u)) && \text{(Linearität von } \phi) \\
&= \sum_{i=1}^{d} (\phi\circ a_V)(v\otimes u_i)\otimes(\phi\circ a_V)(v_i\otimes u)) && \text{(Definition von } \phi\otimes\phi) \\
&= \sum_{i=1}^{d} \psi_V(v\otimes u_i)\otimes\psi_V(v_i\otimes u)) && \text{(Definition von } \phi \text{ im Beweis von 2.5.7 (ii))} \\
&= \sum_{i=1}^{d} \phi_{u_i}(v)\otimes \phi_u(v_i) && \text{(Definition von } \psi_V \text{ in 2.5.4)}
\end{aligned}$$

Analog erhalten wir für die rechte Seite

$$\begin{aligned}
\Delta(\phi(a_V(v\otimes u))) &= \Delta(\psi_V(v\otimes u)) && \text{(Definition von } \phi \text{ im Beweis von 2.5.7 (ii))} \\
&= \Delta(\phi_u (v)) && \text{(Definition von } \psi_V \text{ in 2.5.4).}
\end{aligned}$$

Die zu beweisende Identität bekommt damit die Gestalt

$$\sum_{i=1}^{d} \phi_{u_i}(v)\otimes \phi_u(v_i) = \Delta(\phi_u (v))$$

Beide Seiten dieser Identität sind k-linear. Es reicht also, die Identität für den Fall zu überprüfen, daß v und u Vektoren der oben gewählen Basen von V bzw. $V^\vee$ sind, d.h. es reicht zu zeigen,

$$\sum_{\alpha=1}^{d} \phi_{u_\alpha}(v_\gamma)\otimes \phi_{u_\beta}(v_\alpha) = \Delta(\phi_{u_\beta}(v_\gamma)) \text{ für } \beta,\gamma = 1,\dots,d. \qquad (1)$$

Weil G auf A durch Rechtstranslationen operiert und weil V ein G-stabiler Unterraum ist, gilt 2.3.6 A(ii)

$$a^*V \subseteq k[G]\otimes V$$

Dabei ist

$$a: G \times G \longrightarrow G,\ (g, x) \mapsto x\cdot g^{-1},$$

die Operation von G auf sich (vgl. 2.3.2 Beispiel 2), welche die Operation auf A induziert,

$$G \times A \longrightarrow A,\ (g, f) \mapsto \rho(g)f \text{ mit } (\rho(g)f)(x) = f(xg),$$

(vgl. 2.3.6 B). Auf Grund der G-Stabilität des Unterraums $V \subseteq A$ gilt

$$a^*A \subseteq k[G]\otimes V \ (\subseteq k[G]\otimes k[G] = k[G\times G])$$

(vgl. 2.3.6 A(ii)). Dabei ist $(a^*f)(x,y) = f(a(x,y)) = f(xy^{-1})$. Insbesondere ist

$$a^*v_\gamma = f_{\gamma 1}\otimes v_1+...+f_{\gamma d}\otimes v_d \text{ mit eindeutig bestimmten } f_{\alpha\beta} \in k[G],$$

also mit $g, x \in G$:

$$\begin{aligned}(g\bullet v_\gamma)(x) &= v_\gamma(xg) && \text{(wir schreiben } g\bullet v_\gamma \text{ für } \rho(g)\bullet v_\gamma)\\ &= (a^*v_\gamma)(g^{-1},x)\\ &= f_{\gamma 1}(g^{-1})\bullet v_1(x)+...+f_{\gamma d}(g^{-1})\bullet v_d(x) \text{ mit } f_{\alpha\beta} \in k[G],\end{aligned}$$

also

$$v_\gamma(xg) = f_{\gamma 1}(g^{-1})\bullet v_1(x)+...+f_{\gamma d}(g^{-1})\bullet v_d(x),$$

also

$$(g\bullet v_\gamma)(x) = v_\gamma(xg) = f_{\gamma 1}(g^{-1})\bullet v_1(x)+...+f_{\gamma d}(g^{-1})\bullet v_d(x)$$

also

$$g\bullet v_\gamma = f_{\gamma 1}(g^{-1})\bullet v_1+...+f_{\gamma d}(g^{-1})\bullet v_d \tag{2}$$

Auf Grund der Definition von 2.5.2 folgt

$$\begin{aligned}\phi_{u_\alpha}(v_\gamma)(g) &= u_\alpha(g\bullet v_\gamma)\\ &= f_{\gamma 1}(g^{-1})\bullet u_\alpha(v_1)+...+f_{\gamma d}(g^{-1})\bullet u_\alpha(v_d)\\ &= f_{\gamma\alpha}(g^{-1})\bullet u_\alpha(v_\alpha)\\ &= f_{\gamma\alpha}(g^{-1})\end{aligned}$$

Einsetzen in (2) liefert

$$g\bullet v_\gamma = \sum_{\alpha=1}^{d} f_{\gamma\alpha}(g^{-1})\bullet v_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{d} \phi_{u_\alpha}(v_\gamma)(g)\bullet v_\alpha \tag{3}$$

Damit bekommt die rechte Seite von (1) für $x,g \in G$ die Gestalt

$$\begin{aligned}\mathrm{RHS}(x,g) &= \Delta(\phi_{u_\beta}(v_\gamma))(x,g)\\ &= \phi_{u_\beta}(v_\gamma)(xg)\\ &= (g\bullet\phi_{u_\beta}(v_\gamma))(x) && \text{(G operiert durch Rechtstranslationen auf } k[G])\\ &= \phi_{u_\beta}(g\bullet v_\gamma)(x) && (\phi_u \text{ ist G-Modul-Homomorphismus, vgl. 2.5.2})\\ &= \phi_{u_\beta}\Big(\sum_{\alpha=1}^{d} \phi_{u_\alpha}(v_\gamma)(g)\bullet v_\alpha\Big)(x) && \text{(nach (3))}\end{aligned}$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{d} \phi_{u_\alpha}(v_\gamma)(g)\bullet\phi_{u_\beta}(v_\alpha)(x) \qquad \text{(Linearität von } \phi_{u_\beta}\text{, vgl. 2.5.2))}$$

$$= (\sum_{\alpha=1}^{d} \phi_{u_\beta}(v_\alpha)\otimes\phi_{u_\alpha}(v_\gamma))(x,g)$$

$$= \mathrm{LHS}(x,g)$$

Da dies für alle $x,g \in G$ gilt, folgt (1), wie behauptet.

4. <u>Schritt</u>. $\tilde{\imath}: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}, a_V(v\otimes u) \mapsto a_{V^\vee}(u\otimes v)$ ist korrekt definiert, d.h. unabhängig von der speziellen Wahl der Vektoren $v \in V$ und $u \in V^\vee$, und ist ein k-Algebra-Homomorphismus.

Sei V ein G-Modul. Dann ist

$$V \times V^\vee \longrightarrow a_{V^\vee}(V^\vee\otimes V) \subseteq \mathcal{A},\ (v, u) \mapsto a_{V^\vee}(u\otimes v),$$

eine über k bilineare Abbildung[34], induziert also eine k-lineare Abbildung

$$V\otimes V^\vee \longrightarrow \mathcal{A},\ v\otimes u \mapsto a_{V^\vee}(u\otimes v). \tag{4}$$

Wir lassen V ein Repräsentantensystem der Isomorphieklassen von G-Moduln durchlaufen. Die zugehörigen Abbildungen setzen sich zusammen zu einer k-linearen Abbildung

$$\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{A},\ i_V(v\otimes u) \mapsto a_{V^\vee}(u\otimes v),$$

wenn $\mathcal{F}$ die direkte Summe von 2.5.5 bezeichnet. Wegen 2.5.5 (1) liegt für jeden G-Modul-Homomorphismus ϕ: $V\longrightarrow W$ und beliebige Elemente $v \in V$ und $t\in W^\vee$ die Differenz

$$i_V\circ(id\otimes\phi^\vee)(v\otimes t)-i_W\circ(\phi\otimes id)(v\otimes w)$$

im Kern dieser Abbildung, d.h. der Unterraum $\mathcal{R}\subseteq\mathcal{F}$ liegt im Kern.Nach dem Homomorphiesatz faktorisiert sich die Abbildng über $\mathcal{A} = \mathcal{F}/\mathcal{R}$ und induziert so eine k-lineare Abbildung

$$\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A},\ a_V(v\otimes u) \mapsto a_{V^\vee}(u\otimes v).$$

Dies ist gerade die Abbildung $\tilde{\imath}$, d.h. $\tilde{\imath}$ ist wohldefiniert. Es gilt

$$\tilde{\imath}(a_V(v\otimes u)\bullet a_W(w\otimes t)) = \tilde{\imath}(a_{V\otimes W}((v\otimes w)\otimes(u\otimes t))) \qquad \text{(vgl. 2.5.5 (2))}$$

$$= a_{V^\vee\otimes W^\vee}((u\otimes t)\otimes(v\otimes w)) \qquad \text{(nach Defintion von } \tilde{\imath})^{35}$$

---

[34] Zur Definition von $a_{V^\vee}$ und $\mathcal{A}$ vgl. 2.5.5. Wir identifizieren hier das doppelte Dual von V wie üblich mit V vermittels des k-linearen Isomorphismus

$$V \longrightarrow V^{\vee\vee} = \mathrm{Hom}_k(V^\vee, k),\ v \mapsto (\ell \mapsto \ell(v)).$$

[35] Wir identifizieren hier $(V\otimes W)^\vee$ wie bisher mit $V^\vee\otimes W^\vee$ vermittels des k-linearen Isomorphismus

$$V^\vee\otimes W^\vee \longrightarrow (V\otimes W)^\vee = \mathrm{Hom}_k(V\otimes W, k),\ u\otimes t \mapsto (v\otimes w \mapsto u(v)\bullet t(w)).$$

$= a_{V^\vee}(u\otimes v)\bullet a_{W^\vee}(t\otimes w)$.

Das Einselement $a_I(1\otimes 1)$ von $\mathcal{A}$ wird bei $\tilde{i}$ in sich abgebildet. Deshalb ist $\tilde{i}$ ein Homomorphismus von Ringen mit 1 und als k-lineare Abbbildung damit auch ein k-Algebra-Homomorphismus.

5. Schritt. Es gilt $\phi\circ\tilde{i} = i\circ\phi$, wenn $\phi: \mathcal{A} \longrightarrow A$, die Abbildung von 2.5.7 (ii) bezeichnet.

Es reicht zu zeigen, für jeden G-stabilen k-linearen Unterraum

$$V \subseteq A := k[G]$$

und beliebige Elemente $v \in V$ und $u\in V^\vee$ gilt

$$\phi(\tilde{i}(a_V(v\otimes u))) = i(\phi(a_V(v\otimes u))),$$

denn ϕ und $\tilde{i}$ sind k-Algebra-Homomorphismen (vgl. 2.5.7 (ii) und Schritt 4) und die k-Algebra $\mathcal{A}$ wird von den Elementen der Gestalt $a_V(v\otimes u)$ erzeugt (vgl. Schritt 2 des Beweises von 2.5.7 (ii)). Für die linke Seite der zu beweisenden Identität erhalten wir

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \phi(\tilde{i}(a_V(v\otimes u))) \\ &= \phi(a_{V^\vee}(u\otimes v)) && \text{(Definition von } \tilde{i}) \\ &= \psi_{V^\vee}(u\otimes v) && \text{(nach 2.5.7 (ii))} \\ &= \phi_v(u), && \text{(Definition von } \psi_{V^\vee} \text{ in 2.5.4)[36]} \end{aligned}$$

und für die rechte Seite

$$\begin{aligned} \text{RHS} &= i(\phi(a_V(v\otimes u))) \\ &= i(\psi_V(v\otimes u)) \\ &= i(\phi_u(v)). \end{aligned}$$

Es reicht also zu zeigen,

$$\phi_v(u)(g) = \phi_u(v)(g^{-1})$$

für jedes $g\in G$, d.h.

$$v(g\bullet u) = u(g^{-1}\bullet v)$$

für $v\in V$, $u\in V^\vee$ und $g \in G$.

Wie oben angemerkt haben wir hier das Element $v \in V$ als Linearform auf $V^\vee$ zu betrachten, d.h. $v(g\bullet u) = (g\bullet u)(v)$. Für die linke Seite der zu beweisenden Identität erhalten wir damit

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= (g\bullet u)(v) \\ &= u(g^{-1}\bullet v) && \text{(Operation von G auf } V^\vee\text{, Bemerkung 2.5.1 (i))} \end{aligned}$$

Das ist aber gerade die rechte Seite der zu beweisenden Identität.

Zu (ii). 1. Schritt. Das Assoziativgesetz.

---

[36] Hier ist $v \in V$ wie eine Linearform auf $V^\vee$ zu behandeln mit $v(u) := u(v)$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}\otimes\mathcal{A} & \xleftarrow{\widetilde{\Delta}\otimes\mathrm{id}} & \mathcal{A}\otimes\mathcal{A} \\ \mathrm{id}\otimes\widetilde{\Delta}\uparrow & & \uparrow\widetilde{\Delta} \\ \mathcal{A}\otimes\mathcal{A} & \xleftarrow{\widetilde{\Delta}} & \mathcal{A} \end{array}$$

Wir haben zu zeigen,

$$(\widetilde{\Delta}\otimes\mathrm{id})(\widetilde{\Delta}(x)) = (\mathrm{id}\otimes\widetilde{\Delta})(\widetilde{\Delta}(x)) \text{ für jedes } x \in \mathcal{A}.$$

Da alle beteiligten Abbildungen k-Algebra-Homomorphismen sind, können wir uns auf den Fall beschränkten, daß x ein Erzeugendensystem der k-Algebra $\mathcal{A}$ durchläuft, d.h. wir können wie bisher annehmen, daß x die Gestalt

$$x = a_V(v\otimes u)$$

besitzt. Für die linke Seite der zu beweisenden Identität erhalben wir

$$\begin{aligned} \mathrm{LHS} &= (\widetilde{\Delta}\otimes\mathrm{id})(\widetilde{\Delta}(a_V(v\otimes u))) \\ &= (\widetilde{\Delta}\otimes\mathrm{id})\Big(\sum_{i=1}^{d} a_V(v\otimes u_i)\otimes a_V(v_i\otimes u)\Big) && (\text{Definition von } \widetilde{\Delta}) \\ &= \sum_{i=1}^{d} \widetilde{\Delta}(a_V(v\otimes u_i))\otimes a_V(v_i\otimes u) \\ &= \sum_{i=1}^{d} \Big(\sum_{j=1}^{d} a_V(v\otimes u_j)\otimes a_V(v_j\otimes u_i)\Big)\otimes a_V(v_i\otimes u) && (\text{Definition von } \widetilde{\Delta}) \\ &= \sum_{j=1}^{d} \sum_{i=1}^{d} a_V(v\otimes u_j)\otimes a_V(v_j\otimes u_i)\otimes a_V(v_i\otimes u) \end{aligned}$$

Für die rechte Seite erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathrm{RHS} &= (\mathrm{id}\otimes\widetilde{\Delta})(\widetilde{\Delta}(a_V(v\otimes u))) \\ &= (\mathrm{id}\otimes\widetilde{\Delta})\Big(\sum_{i=1}^{d} a_V(v\otimes u_i)\otimes a_V(v_i\otimes u)\Big) && (\text{Definition von } \widetilde{\Delta}) \\ &= \sum_{i=1}^{d} a_V(v\otimes u_i)\otimes \widetilde{\Delta}(a_V(v_i\otimes u)) \\ &= \sum_{i=1}^{d} a_V(v\otimes u_i)\otimes \sum_{j=1}^{d} a_V(v_i\otimes u_j)\otimes a_V(v_j\otimes u) && (\text{Definition von } \widetilde{\Delta}) \\ &= \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} a_V(v\otimes u_i)\otimes a_V(v_i\otimes u_j)\otimes a_V(v_j\otimes u) \\ &= \mathrm{LHS} && (\text{mit i und j vertauscht}). \end{aligned}$$

2. <u>Schritt</u>. Existenz des neutralen Elements.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xleftarrow{\mathrm{id}\otimes\widetilde{e}} & \mathcal{A}\otimes\mathcal{A} \\ \widetilde{e}\otimes\mathrm{id}\uparrow & \nwarrow\mathrm{id} & \uparrow\widetilde{\Delta} \\ \mathcal{A}\otimes\mathcal{A} & \xleftarrow{\widetilde{\Delta}} & \mathcal{A} \end{array}$$

Dabei sei $\widetilde{e}: \mathcal{A} \xrightarrow{\phi} A \xrightarrow{e} k$ die Zusammensetzung der Abbildung ϕ von 2.5.7 mit der Auswertung im neutralen Element der Gruppe G.

Wir haben zu zeigen,

$$(id\otimes\widetilde{e})(\widetilde{\Delta}(x)) = x = (\widetilde{e}\otimes id)(\widetilde{\Delta}(x)) \text{ für jedes } x \in \mathcal{A}.$$

Da alle beteiligten Abbildungen k-Algebra-Homomorphismen sind, können wir uns auf den Fall beschränkten, daß x ein Erzeugendensystem der k-Algebra $\mathcal{A}$ durchläuft, d.h. wir können wie bisher annehmen, daß x die Gestalt

$$x = a_V(v\otimes u)$$

besitzt. Für die linke Seite der zu beweisenden Identität erhalben wir

$$\begin{aligned}
\text{LHS} &= (id\otimes\widetilde{e})(\widetilde{\Delta}(a_V(v\otimes u))) \\
&= (id\otimes\widetilde{e})(\sum_{i=1}^{d} a_V(v\otimes u_i)\otimes a_V(v_i\otimes u)) && \text{(Definition von } \widetilde{\Delta}) \\
&= \sum_{i=1}^{d} a_V(v\otimes u_i)\otimes \widetilde{e}(a_V(v_i\otimes u)) \\
&= \sum_{i=1}^{d} a_V(v\otimes u_i)\bullet(\phi(a_V(v_i\otimes u)))(e) && \text{(Definition von } \widetilde{e}) \\
&= \sum_{i=1}^{d} a_V(v\otimes u_i)\bullet(\psi_V(v_i\otimes u))(e) && \text{(Definition von } \widetilde{e}) \\
&= \sum_{i=1}^{d} a_V(v\otimes u_i)\bullet(\phi_u(v_i))(e) && \text{(Definition von } \psi_V) \\
&= \sum_{i=1}^{d} a_V(v\otimes u_i)\bullet u(e\bullet v_i) && \text{(Definition von } \phi_u) \\
&= \sum_{i=1}^{d} a_V(v\otimes u_i)\bullet u(v_i) && \text{(e ist neutrales Element von G)} \\
&= a_V(v\otimes \sum_{i=1}^{d} u(v_i)\bullet u_i) && (a_V \text{ ist k-linear}) \\
&= a_V(v\otimes \sum_{i=1}^{d} v_i(u)\bullet u_i) && (v_i \text{ ist Linearform auf } V^\vee) \\
&= a_V(v\otimes u) && (v_i(u) \text{ ist i-te Koordinate von u bzgl. der Basis der } u_i \text{ von } V^\vee).
\end{aligned}$$

Damit gilt das linke Gleichheitszeichen der zu beweisenden Identität. Der Beweis für die Gültigkeit des rechten ist analog.

3. <u>Schritt</u>. Existenz des inversen Elements.

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{A}\otimes\mathcal{A} & \xrightarrow{\iota\otimes id} & \mathcal{A}\otimes\mathcal{A} \\
\tilde{\Delta}\uparrow & & \downarrow m \\
\mathcal{A} & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathcal{A} \\
\tilde{\Delta}\downarrow & & \uparrow m \\
\mathcal{A}\otimes\mathcal{A} & \xrightarrow{id\otimes\iota} & \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}
\end{array}$$

Dabei ist m induziert durch die Multiplikation von $\mathcal{A}$ und ε ist die

Zusammensetzung von $\tilde{e}$ mit der natürlichen Einbettung $k \hookrightarrow \mathcal{A}$.

Wir haben zu zeigen,

$$m((\iota\otimes id)(\tilde{\Delta}(x))) = \varepsilon(x) = m((id\otimes\iota)(\tilde{\Delta}(x))) \text{ für jedes } x \in \mathcal{A}.$$

Da alle beteiligten Abbildungen k-Algebra-Homomorphismen sind, können wir uns auf den Fall beschränkten, daß x ein Erzeugendensystem der k-Algebra $\mathcal{A}$ durchläuft, d.h. wir können wie bisher annehmen, daß x die Gestalt

$$x = a_V(v\otimes u)$$

besitzt.

Betrachten wir das folgende Diagramm in Gestalt eines Würfels.

$$\begin{tikzcd}
 & A\otimes A \arrow[rr, "i\otimes id"] & & A\otimes A \arrow[dd, "m"] \\
\mathcal{A}\otimes\mathcal{A} \arrow[rr, "i\otimes id"] \arrow[ur] & & \mathcal{A}\otimes\mathcal{A} \arrow[dd, "m"] \arrow[ur] & \\
 & A \arrow[uu, "\Delta"] \arrow[rr, "\varepsilon"] & & A \\
\mathcal{A} \arrow[uu, "\tilde{\Delta}"] \arrow[rr, "\varepsilon"] \arrow[ur] & & \mathcal{A} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Die Frontfläche des Würfels wird gerade vom oberen Teil des Diagramms gebildet, dessen Kommutativität wir beweisen müssen.Die rückseitige Fläche besteht aus dem analogen Diagramm mit A anstelle von $\mathcal{A}$ (welches kommutativ ist).

Die schräg nach hinten gerichteten Pfeile sollen zur Abbildung φ von 2.5.7 (unten) bzw. zu φ⊗φ gehören (oben). Weil φ ein k-Algebra-Homomorphismus ist, ist die rechte Seitenfläche des Würfels kommutativ. Nach dem dritten Schritt im Beweis von (i) ist die linke Seitenfläche kommutativ.

Die Bodenfläche des Würfels ist kommutativ nach Definition von der beiden mit ε bezeichneten Abbildungen. Die Dachfläche ist es nach dem fünften Schritt im Beweis von (i).

Da alle Flächen des Würfels kommutativ sind - außer eventuell die Frontfläche - ist die Frontfläche zumindest modulo Ker(φ) kommutativ, d.h. modolo dem Nilradikal von $\mathcal{A}$ (nach 2.5.7 (iii)).Wenn wir zeigen können, daß

$$m((\iota\otimes id)(\tilde{\Delta}(a_V(v\otimes u)))) \text{ und } \varepsilon(v\otimes u)$$

in k liegen, müssen diese beiden Elemente gleich sein (weil die Elemente des Nilradikals mit k nur die 0 gemeinsam haben). Für $\varepsilon(v\otimes u)$ ist das nach Definition von ε der Fall.
Zum Beweis der Kommutativität der Frontfläche reicht es damit zu zeigen,

$$m((\iota\otimes id)(\tilde{\Delta}(a_V(v\otimes u)))) \in k.$$

Es gilt

$$m((\iota\otimes id)(\tilde{\Delta}(a_V(v\otimes u)))) = m((\iota\otimes id)(\sum_{i=1}^{d} a_V(v\otimes u_i)\otimes a_V(v_i\otimes u))) \quad \text{(Definition von } \tilde{\Delta})$$

$$= m(\sum_{i=1}^{d} \iota(a_V(v\otimes u_i))\otimes a_V(v_i\otimes u)))$$

$$= \sum_{i=1}^{d} \iota(a_V(v\otimes u_i))\bullet a_V(v_i\otimes u))) \qquad \text{(Definition von m)}$$

$$= \sum_{i=1}^{d} a_{V^\vee}(u_i\otimes v))\bullet a_V(v_i\otimes u))) \qquad \text{(Definition von } \iota)$$

$$= \sum_{i=1}^{d} a_{V^\vee\otimes V}(u_i\otimes v_i\otimes v\otimes u) \qquad \text{(Definition der Multiplikation in } \mathcal{A})$$

Es reicht zu zeigen,

$$\sum_{i=1}^{d} a_{V^\vee\otimes V}(u_i\otimes v_i\otimes v\otimes u) \in k \text{ für } v\in V,\ u\in V^\vee \text{ und } i = 1,\dots,d. \qquad (5)$$

Im ersten Schritt haben wir für k-Vektorraumsbasen[37]

$$v_1,\dots,v_d \in V$$

$$v'_1,\dots,v'_d \in V$$

von V und die zugehörigen dualen Basen

$$u_1,\dots,u_d \in V^\vee$$

$$u'_1,\dots,u'_d \in V^\vee$$

gezeigt, es gilt

$$\delta_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{d} d_{\alpha j}\bullet c_{\alpha i},$$

wenn (c_{ij}), $(d_{ij}) \in M_d(k)$ die Basiswechsel-Matrizen bezeichnen:

$$v'_i = \sum_{\alpha=1}^{d} c_{\alpha i}\bullet v_\alpha$$

$$u'_j = \sum_{\beta=1}^{d} d_{\beta j}\bullet u_\beta$$

d.h. es ist

$$(d_{ij})^T\bullet(c_{ij}) = (\delta_{ij}).$$

---

[37] Im Vergleich zu den Bezeichnungen im ersten Schritt, vertauschen wir hier die Rollen der gestrichenen und ungestrichenen Basisvektoren.

Ist speziel $g \in G$ und $v'_i = g\bullet v_i$ für alle i, so gilt (also $u'_j = g\bullet u_j$ für alle j, denn

$$
\begin{aligned}
< g\bullet u_j, v'_i > &= (g\bullet u_j)(v'_i) && \text{(Definition der Dualitätspaarung)}\\
&= (g\bullet u_j)(g\bullet v_i) && \text{(Definition von } v'_i)\\
&= u_j(g^{-1}\bullet g\bullet v_i) && \text{(Operation von G auf } V^\vee\text{, Bemerkung 2.5.1(i))}\\
&= u_j(\, v_i)\\
&= \delta_{ij}) && (\{v_i\} \text{ und } \{\, u_j\} \text{ sind duale Basen)}
\end{aligned}
$$

Es folgt

$$
\begin{aligned}
g\bullet \sum_{i=1}^{d} u_i \otimes v_i &= \sum_{i=1}^{d} (g\bullet u_i)\otimes(g\bullet v_i)\\
&= \sum_{i=1}^{d} u'_i \otimes v'_i\\
&= \sum_{i=1}^{d} (\sum_{\beta=1}^{d} d_{\beta i}\bullet u_\beta)\otimes(\sum_{\alpha=1}^{d} c_{\alpha i}\bullet v_\alpha)\\
&= \sum_{\alpha=1}^{d}\sum_{\beta=1}^{d}\sum_{i=1}^{d} d_{\beta i}\bullet c_{\alpha i}\bullet u_\beta \otimes v_\alpha\\
&= \sum_{\alpha=1}^{d}\sum_{\beta=1}^{d} \delta_{\alpha\beta}\bullet u_\beta \otimes v_\alpha\\
&= \sum_{\alpha=1}^{d} u_\alpha \otimes v_\alpha\\
&= \sum_{i=1}^{d} u_i \otimes v_i
\end{aligned}
$$

Wir haben gezeigt, die Gruppe G operiert trivial auf dem Element $\sum_{i=1}^{d} u_i \otimes v \in V^\vee \otimes V$.

Deshalb ist die k-lineare Abbildung

$$\alpha: k = I \longrightarrow V^\vee \otimes V,\ c \mapsto \sum_{i=1}^{d} u_i \otimes v_i,$$

die den trivialen G-Modul in den G-Modul $V^\vee \otimes V$ abbildet, ein Homomorphismus von G-Moduln. Es folgt

$$
\begin{aligned}
m((\iota\otimes id)(\widetilde{\Delta}(a_V(v\otimes u)))) &= \sum_{i=1}^{d} a_{V^\vee\otimes V}(u_i\otimes v_i\otimes v\otimes u) && \text{(die obige Rechnung)}\\
&= a_{V^\vee\otimes V}(\sum_{i=1}^{d} u_i\otimes v_i\otimes v\otimes u) && (a_{V^\vee\otimes V} \text{ ist k-linear, vgl.)}\\
&= a_{V^\vee\otimes V}(\alpha(1)\otimes v\otimes u) && \text{(Definition von } \alpha)\\
&= a_{I^\vee\otimes I}(1\otimes\alpha^\vee(v\otimes u)) && \text{(nach 2.5.5 (1))}
\end{aligned}
$$

$$= \alpha^{\vee}(v\otimes u)\bullet a_{I^{\vee}\otimes I}(1\otimes 1) \qquad (\alpha^{\vee}(v\otimes u)\in k \text{ und } a_{I^{\vee}\otimes I} \text{ ist k-linear}).$$

Dieses Element liegt in k, denn es ist $\alpha^{\vee}(v\otimes u)\in k$ und $a_{I^{\vee}\otimes I}(1\otimes 1)$ ist das Einselement von $\mathcal{A}$. Damit ist (5) bewiesen und damit die Kommutativität der Frontfläche des obigen Würfels, d.h. es gilt

$$\varepsilon = m\circ(i\otimes id)\circ\widetilde{\Delta}.$$

Die obere Hälfte des Diagramms, dessen Kommutativität die Existenz des Inversen ausdrückt ist damit tatsächlich kommutativ. Die Kommutativität der unteren Hälfte wird analog bewiesen.
4. Schritt. Zum Satz von Cartier.
Der Beweis übersteigt die Möglichkeiten dieses Textes. Er beschreibt die Hüllalgebra der Lie-Algebra der Gruppe G mit Hilfe von Differentialoperatoren (Distributionen).

QED.

2.5.9 Aufgaben

(i) Sei F ein Teilkörper von k. Ist G eine F-Gruppe, so besitzt die Algebra $\mathcal{A}$ von 2.5.6 eine F-Struktur.
(ii) Beweisen Sie die Behauptungen von 2.5.8.

Beweis. Zu (i). Ersetzt man in der Definition von $\mathcal{A}$ die Isomorphie-Klassen rationaler Darstellungen

$$G \longrightarrow GL(V)$$

durch solche, für die V eine F-Struktur besitzt und welche über F definiert sind, und verwendet anstelle beliebiger G-Modul-Homomorphismen

$\phi: V \longrightarrow W$

nur solche, die über F definiert sind, so erhält man eine k-Algebra $\mathcal{A}_F$ mit F-Struktur, welche sich in natürlicher Weise in $\mathcal{A}$ abbilden läßt,

$$\mathcal{A}_F \longrightarrow \mathcal{A}.$$

Das Bild der F-Struktur von $\mathcal{A}_F$ in $\mathcal{A}$ ist eine F-Struktur von $\mathcal{A}$: zum Beweis verwende einen k-linearen Unterraumn $V \subseteq k[G]$ endlicher Dimension, welcher G-stabil ist, das Einelement von k[G] enthält, k[G] als k-Algebra erzeugt und über k von Elementen erzeugt wird, die in der F-Struktur von k[G] liegen wie im Beweis von 2.5.7 (i).
Zu (ii). siehe die in 2.5.8 angegebenen Beweise.
QED.

2.6 Geschichtliche Anmerkungen

Die Bezeichnung ‘algebraische Gruppe’ (genauer ‘groupe algébrique’) scheint ihren Ursprung in den Arbeiten von E. Picard zur Galois-Theorie der linearen Differentialgleichungen zu haben (um 1880). Die in diesen Arbeiten auftretenden Galois-Gruppen sind tatsächlich lineare algebraische Gruppen über den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Die Arbeiten von C. Kolchin zu den algebraischen Gruppen von 1948 (Kolchin [1] und [2]) wurden ebenfalls durch die Galois-Theorie der linearen Differentialgleichungen motiviert. Deren Ergebnisse wurden von Borel in dessen grundlegenden Papier (Borel [1]) verwendet. Die Betonung liegt hier auf der Analogie zwischen den Lie-Gruppen und den linearen algebraischen Gruppen.

Die Ergebniss der Abschnitte 2.2 und 2.3 findet man im ersten Kapitel von Borel [1]. Einige der Ergebnisse (wie 2.2.1) gehen auf Kolchin zurück (vgl. Kolchin [1] und [2]). Das Ergebnis von 2.2.6 stammt von Chevalley (siehe Chevalley [1] und [2,§7]).

Die Existenz der abgeschlossenen Orbits in einem G-Raum (vgl. 2.3.3(ii)) wurde von Borel [1, 15.4] bewiesen. Dieses einfache Ergebnis ist ein Grundbaustein der Theorie der linearen algebraischen Gruppen. Zum Beispiel wird es benötigt im Beweis des zentralen Fixpunktsatzes 6.2.6. Es sollte erwähnt werden, daß die Algebraizität der Operation wesentlich ist: eine komplexe Lie-Gruppe, die auf einer komplexen Mannigfaltigkeit operiert, muß keine abgeschlossenen Orbits besitzen.

Theorem 2.4.8 zur Jordan-Zerlegung in einer linearen algebraischen Gruppe wurde in Borel [1, Kapitel 2] bewiesen. Es ist auch eine Konsequenz von Aussage 3.1.1, welche zuerst in der Arbeit von Kolchin [2, §3] bewiesen wurde. Der hier angegebene Beweis ist im wesentlichen eine formale Konsequenz der Funtorialität 2.4.4 (iii) der Jordan-Zerlegung einer linearen Abbildung.

Der Satz von Tannaka 2.5.3 geht auf Tannaka [1] zurück, wo ein ähnliches Ergebnis für kompakte Lie-Gruppen bewiesen wird. Das Ziel von Tannaka [1] war der Beweis einer Analogie zur Pontryagin-Dualität abelscher topologischer Gruppen für kompakte Lie-Gruppen. Die Ergebnisse von 2.5 sollten heutzutage im Kontext der Theorie der Tensor-Kategorien gesehen werden, auf die wir hier nicht eingehen (vgl. Deligne [1] und Deligne & Milne [1]).

Index

—F—

—G—

—H—

—I—

—J—

—K—

—L—

—M—

—N—

Inhalt